PROGETTO
“MATEMATICA E REALTA”

Punti di forza e punti di debolezza
Confronto di esperienze

Valeria Ferrari - Rosa Iaderosa
(Liceo Statale “G.B. Vico” – Corsico –MI)

La nostra esperienza, dopo i primi 5 anni

Abbiamo gestito finora laboratori pomeridiani, con potenziamento di orario,

per studenti del Liceo Scientifico dalla seconda alla quarta.

I nostri studenti hanno sempre partecipato al test finale, da quattro anni partecipano alla finale nazionale della gara e da tre al convegno sulla migliore presentazione.

La nostra esperienza

Abbiamo finora constatato la validità del Progetto, ma siamo riuscite a coinvolgere realmente gli studenti e ad avere risultati soddisfacenti e anche brillanti **solo sulla fascia alta**, quindi abbiamo avuto finora la possibilità di verificarne le potenzialità didattiche soprattutto nell'**approfondimento** di segmenti di curricolo e per l'eccellenza.

Quali i punti di forza

Prima ancora di sperimentare le attività in aula, abbiamo accolto con entusiasmo il contenuto del progetto, in quanto tutte le proposte didattiche che conoscevamo riguardavano modelli troppo difficili per essere proposti nella scuola secondaria

(dinamica delle popolazioni, modelli probabilistici,…)

Punti di forza

Ci ha colpito invece la proposta di adeguare e diffondere concretamente modelli reali anche alla scuola secondaria di primo e secondo grado. Ciò offre realmente la possibilità di promuovere le competenze di modellizzare e risolvere problemi **nei vari segmenti scolastici**.

Alcune idee che ci sono parse più originali

- La “finestra normanna”
- La costruzione del “paccometro” per le scatole dei pacchi postali
- Modellizzare il diffondersi della luce del faro come fenomeno periodico
- L’ “imbianchino fai da te”, che consente di introdurre in un contesto reale e familiare per i ragazzi l’idea di parametro e di equazione parametrica
- L’utilizzo delle disequazioni come strumento indispensabile per costruire e utilizzare modelli
- ……………………………………

FORMALIZZARE

Dare "forma" al mondo

(P. Guidoni)

esiste un "universo" di oggetti nella teoria ed in questi si riconoscono enti (e relazioni) presenti in un fenomeno della realtà osservata

MODELLIZZARE

Attività che sintetizza la capacità di:

- formalizzare attraverso un **modello matematico** una situazione problematica
- Analizzare aspetti del modello in relazione alla situazione di partenza e **reinterpretarli**

MODELLIZZARE

Riteniamo che le attività di modellizzazione siano quelle che più di altre possano favorire a scuola coinvolgimento e motivazione degli studenti, anche per la matematica "difficile".

LE NUOVE TECNOLOGIE

I laboratori di M&R ci hanno dato l'opportunità di convincerci ulteriormente di quanto già eravamo sicure:

l'efficacia **dell'utilizzo delle nuove tecnologie**

e delle **metodologie attive** per promuovere la capacità di affrontare, interpretare, risolvere problemi, **e anticipare l'utilizzo di strumenti matematici più avanzati sul piano teorico**.

ASPETTI METODOLOGICI

Dopo le prime esperienze, in cui ci sembrava di dover mediare molto la rappresentazione e la risoluzione dei problemi con i ragazzi, abbiamo sempre più agito devolvendo il più possibile a loro tutte queste fasi.

Nei laboratori proponiamo il problema e aspettiamo che gli allievi cerchino di appropriarsi della situazione, di comprenderla, facciano dei tentativi di rappresentazione e interpretazione, e poi discutiamo con loro.

Alcuni hanno bisogno di qualche aiuto.

Chiediamo poi che concludano comunque da soli la parte risolutiva.

Un obiettivo ambizioso

Vorremmo lavorare per il coinvolgimento anche di indirizzi con un programma di matematica "debole" per promuovere motivazione e consolidamento delle competenze matematiche, e anche per la fascia di studenti non particolarmente "bravi"…, vista la grande validità didattica di queste idee e materiali.

PUNTI DI FORZA

Un altro aspetto qualificante del Progetto è certamente costituito dai testi, che sono ***veri*** e non ***verosimili***, richiedono la gestione di numeri "veri" e non volutamente semplificati, ma soprattutto riguardano contesti reali e sono tratti da fonti "reali", cioè da giornali, e altre fonti di informazione.

Ma…

Proprio per la forte significatività dei contesti proposti nel laboratori di modellizzazione, ci sembra importante riflettere col gruppo su quegli aspetti che ci sono risultati da approfondire.

A nostro giudizio, la principale difficoltà didattica da affrontare con gli studenti è fortemente collegata **ai testi dei problemi**.

Una riflessione

In base alla nostra esperienze, proponiamo a chi collabora al progetto e lo sperimenta di riflettere sul fatto che

l*e funzioni prevalentemente comunicative di un linguaggio giornalistico non sempre sono coerenti con le funzioni rappresentative di un linguaggio matematico evoluto.*

Rendere la proposta accessibile a tutti gli studenti

Se vogliamo coinvolgere tutti gli studenti, dobbiamo tenere presente che l’attività didattica dovrà mediare sul linguaggio e preparare alla lettura e alla comprensione dei problemi di M&R.

Lingua e Matematica

Le più recenti ricerche didattiche, nazionali e internazionali in didattica della matematica, e le prove proposte dai sistemi di valutazione (INVALSI, PISA, …), testimoniano l'interesse che negli ultimi anni si è riacceso sulle connessioni tra didattica della lingua e didattica della matematica, e sulle influenze reciproche di questi due ambiti.

Sviluppo del nostro intervento

La prima parte di questo intervento cercherà di mettere a fuoco alcune difficoltà didattiche legate al linguaggio, nell'attuazione del Progetto M&R.

La seconda parte analizzerà

la nostra mediazione didattica di fronte ad aspetti più

centrati sulla disciplina, connessi con i problemi proposti.

Matematica e linguaggio

In diverse occasioni matematici e linguisti hanno collaborato nell'ottica di affrontare congiuntamente le difficoltà in matematica, dovute all'uso del linguaggio (prove INVALSI, ricerche sui testi di problemi, ecc.).

La matematica insegnata a scuola ha come presupposto, soprattutto nei testi della scuola superiore, l'utilizzo di un linguaggio univoco, legato

alla **semantica** della teoria di riferimento, mentre il linguaggio colloquiale, o comunque specialistico in altri ambiti, utilizza anche aspetti che fanno capo alla **pragmatica**.

Il punto di vista del linguista

- Per analizzare i testi e studiare le funzioni dei linguaggi è necessaria un'analisi dettagliata dei *contesti* in cui i *testi* sono prodotti e interpretati.
- Ci sono contesti *di situazione* (quelli che più interessano la modellizzazione), ma anche contesti di *testi*, e di *cultura*. I testi delle fonti utilizzate in M&R spesso appartengono a contesti culturali non coincidenti solo con quello matematico.

Le conseguenze

Ciò comporta che spesso frasi, che nel linguaggio matematico non dovrebbero prestarsi a più interpretazioni, sono invece dei veri e propri *atti linguistici*, cioè contengono preconcezioni, giudizi, idee di chi le esprime, e si prestano quindi a più interpretazioni, anche sul piano lessicale.

I registri

Il *registro* è la costruzione che lega i testi ai contesti.

Ci sono registri *evoluti* e *colloquiali*, quelli evoluti si utilizzano non solo nella comunicazione scientifica, ma anche in quella giuridica, economica, politica, letteraria. Il confine tra tutti questi registri non può essere netto, è sfumato, se ci si muove nell'utilizzo della lingua e non solo del metalinguaggio per parlare di matematica.

I testi verbali in matematica

Tutte le volte che ci si confronta con testi verbali più articolati, in Matematica, è necessario considerare la maggiore complessità delle influenze reciproche tra *lingua naturale* e sue funzioni, e *linguaggio matematico*, legato univocamente a simboli, figure codificate, termini definiti.

Scopi diversi

Molte scelte riguardo alla rappresentazione dei concetti, degli oggetti e delle relazioni in matematica sono influenzate dall'esigenza di **applicare algoritmi**, più che da quella di **comunicare informazioni**.

Il registro matematico

Nel registro matematico la funzione prevalente è il *trattamento* per dedurre, trasformare algebricamente, applicare algoritmi, senza puntare l'attenzione su chi riceve la comunicazione. Ha una funzione prevalentemente strumentale e proprio per questo un forte legame con la **sintassi**

Il registro colloquiale

Esigenze **pragmatiche**, per l'attenzione allo scopo della comunicazione e ai soggetti coinvolti in essa, rendono diversi i registri colloquiali che inevitabilmente si trovano quando il linguaggio verbale viene usato indipendentemente o congiuntamente al linguaggio matematico.

In un registro verbale, anche evoluto:

La sintassi è più sfumata, a volte le relazioni tra le frasi non vengono esplicitate, il linguaggio si adatta a registri culturali diversi, in relazione a chi sarà il ricevente dell'informazione.

Nel linguaggio matematico evoluto invece la componente verbale è essenziale, scarna, deve soltanto sostituire la componente simbolica attraverso la parafrasi.

La proposta

Non è proponibile analizzare più a fondo, in questa sede, questi aspetti, che fanno riferimento a teorie specifiche.

La nostra proposta è tuttavia una riflessione comune del gruppo che elabora e sperimenta il Progetto M&R, al fine di mettere a fuoco, ogni volta che se ne presenti l'occasione, come i testi utilizzati per proporre problemi di modellizzazione possano rendere consapevoli gli studenti delle differenze di uso e di significati rispetto al linguaggio specifico della matematica.

Un obiettivo aggiuntivo del progetto

Il progetto M&R può utilizzare positivamente le difficoltà che i testi presentano:

può promuovere a scuola un maggiore coinvolgimento attivo degli studenti nei confronti della riflessione sui linguaggi, e soprattutto promuovere la consapevolezza e il controllo tra vari linguaggi, contesti, registri.

Le reali difficoltà di attuazione per M&R

Forse i problemi di M&R non presentano una grande complessità dal punto di vista concettuale. C'è un denominatore comune che è il campionario di funzioni matematiche con cui modellizzare, che lo studente si allena a controllare ed utilizzare.

Le principali difficoltà risiedono, per quanto abbiamo potuto verificare, nell'utilizzo di un linguaggio che ha scopi, contesti diversi da quelli scolastici, nel quale il ragazzo si muove con difficoltà perché spesso **non trova facilmente un collegamento tra la situazione, la rappresentazione, l'utilizzo di un linguaggio evoluto relativo ad un contesto (quello giornalistico) e il contesto scolastico e il linguaggio evoluto della matematica.**

Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e di debolezza del progetto

C’è una vera gradualità nella conduzione didattica?

Il Progetto prevede delle attività didattiche in cui l'insegnante media una proposta tratta dalle fonti di informazione per un pubblico non scolastico, e la sviluppa didatticamente. Poi il test finale richiede che questa mediazione sia devoluta completamente allo studente. E’ possibile promuovere questa capacità attraverso un numero limitato di esempi e di attività?

E’ doveroso allontanare il *rischio* che i ragazzi si abituino, una volta compreso il tipo di modello da utilizzare, a *rappresentare ogni nuovo problema in maniera analoga a quelli già svolti*, senza una vera riflessione e rielaborazione personale sui testi.

Forse gli insegnanti potrebbero :

organizzare, pianificare una serie di attività didattiche da svolgere a latere per preparare realmente gli studenti a questa mediazione ed interpretazione. Ad esempio, gli studenti potrebbero partire dall'esplicitazione della loro comprensione personale del testo, mediante una parafrasi, e discuterla poi con l'insegnante e i compagni.

Si tratta di prestare attenzione ad un'educazione linguistica in senso più ampio, da promuovere a scuola, che passi eventualmente anche attraverso la collaborazione degli insegnanti di lingua.

Qualche esempio…

Riferimenti poco chiari ai termini inseriti nel testo (ambiguità, impliciti…)

Risparmi sulla Sanità

Nel bilancio da 100 miliardi della sanità italiana si possono risparmiare più di cinque miliardi di euro senza chiudere reparti o tagliare servizi. Come? “Con l’innovazione tecnologica", assicura Mariano Corso1, che ha studiato la ricetta. Una giornata di degenza ospedaliera costa circa 500 euro, con la telemedicina può essere ridotta a 70 euro con le stesse cure a casa del malato. Se nel 2010 le giornate di ricovero sono state 75 milioni (secondo il Ministero della Salute), una riduzione del 10 per cento porterebbe risparmi stimabili in *oltre 3 miliardi di euro.*

1 Osservatorio *Information and Communication Technology (Ict) in Sanità, Politecnico di* Milano. Fonte: L’Espresso, 12.1.2012

(ambiguità dei termini – impliciti)

Qui il linguaggio matematico si mescola ad altri linguaggi

Cultura a picco

I dati parlano chiaro: è lo stesso bilancio di previsione del Ministero che certifica un crollo

verticale. La spesa per la cultura è una percentuale infinitesima del bilancio pubblico: 0,18 per cento.

Determinare il finanziamento medio annuo del periodo 2003-2011

(termini legati al contesto situazionale, non immediatamente collegati al problema matematico)

Testo strutturalmente costruito in modo poco chiaro

Dal test 2012 quesito C.1.2:

Il computer? Un amico. Nel 2009 lo ha usato il 9,9 % degli anziani tra i 65 e i 74 anni (era il 5,5 nel 2005). Tra il 2005 e il 2009 l'uso di Internet è balzato dal 3,9 all'8,5 %. Nel 2009 ha partecipato ai corsi di pc il 32,7%.

[Fonte: Famiglia Cristiana, n.13/2010]

Dopo aver costruito un modello per descrivere il fenomeno, scegli la risposta esatta all eseguenti domande:

C1.2.1: Se prosegue questo trend, in futuro tutti gli anziani che usano il PC andranno anche in Internet?

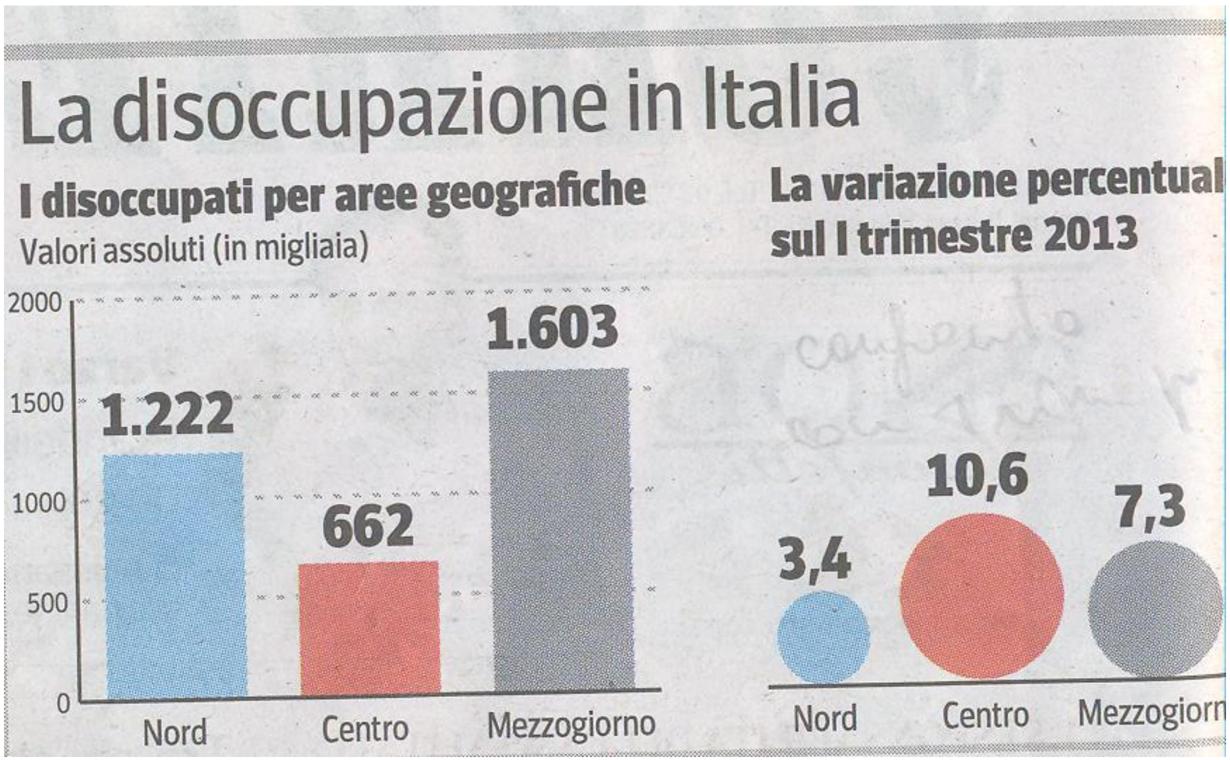
C1.2.2: Il tasso annuale di crescita della percentuale di anziani che usano il PC è pari a….

C1.2.3: I due tassi annuali di crescita (% degli anziani che usano il PC e di quelli che navigano in Internet)differiscono per meno dell'uno per mille?

Esempi di situazioni linguisticamente complesse

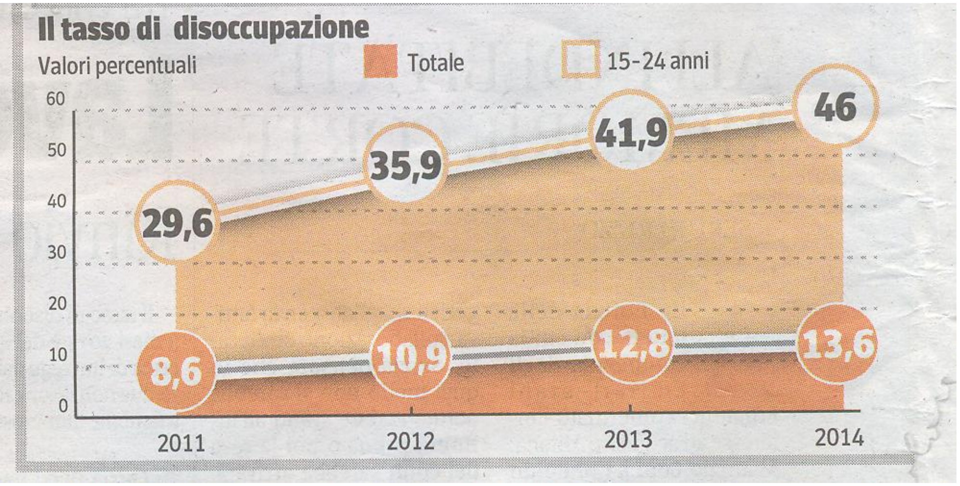
Molto frequentemente, come accade nei dati riportati dai giornali, si parla di **variazione** di un dato (numero di disoccupati, prezzo di un certo bene,…) e **tasso percentuale** relativo a questo dato. Spesso i due andamenti sono diversi, ma nei problemi finora utilizzati nei laboratori, la differenza non emerge così chiaramente.

Un esempio di “conflitto” da evidenziare didatticamente



Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e di debolezza del progetto

andamenti



La variazione del dato
Il tasso percentuale

ti di forza e
di debolezza del progetto

La proposta didattica

Certamente sgombrerebbe da ogni equivoco trattare problemi in cui i due andamenti fossero messi a confronto all'interno della stessa attività.

Qualche altro esempio di difficoltà:

Coca cola, il Telepass, il kerosene del jet

Coca cola

La seguente tabella rappresenta i “movimenti “ del mercato domanda – offerta in funzione del prezzo unitario relativi alla vendita di Coca cola

Prezzo per lattina (euro)	0.60	0.75
Domanda	400	350
offerta	300	500

Determinare il prezzo unitario di equilibrio e la corrispondente domanda di equilibrio. Determinare il prezzo unitario per cui si ha il massimo ricavo.

Problema linguistico

Domanda: analisi del significato della parola

- **domanda** s'intende la quantità di consumo richiesta dal mercato e dai consumatori di un certo bene o servizio.
- L'utenza produce domanda

Offerta: analisi del significato della parola

- per **offerta** si intende la quantità di un certo bene o servizio che viene messa in vendita in un dato momento a un dato prezzo
- I produttori generano offerta

Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e di debolezza del progetto

Analisi della tabella iniziale

domanda

- Un aumento della domanda produce un aumento del costo
- Una diminuzione della domanda provoca un crollo dei prezzi e una diminuzione dell'offerta
- Un aumento del costo fa diminuire la domanda
- Costo passa da 0,60 a 075
- Domanda passa da 400 a 350

offerta

- Un aumento dell'offerta provoca un crollo del costo
- Una diminuzione dell'offerta a fronte di un aumento della domanda crea un aumento del costo
- Un aumento del costo fa aumentare l'offerta
- Costo passa da 0,60 a 075
- Offerta passa da 300 a 500

Sciolti i nodi

- È diventato semplice scrivere l'equazione della domanda
- **Funzione lineare di domanda $f(x) = mx+q$ $m<0$**
- **Al crescere del prezzo unitario, la domanda diminuisce.**
- **$f(x) = -333x+600$**

- È diventato semplice scrivere l'equazione della offerta
- **Funzione lineare di offerta $g(x) = mx+q$ $m>0$**
- **Al crescere del prezzo unitario, l'offerta sale.**
- $g(x) = 1333x-500$

TELEPASS.IT

Il testo del problema e le ambiguità

L'Agevolazione Pendolari viene calcolata secondo un sistema di modulazione tariffaria che prevede, in particolare, per i soggetti aventi diritto, una riduzione progressiva del pedaggio, fino ad un massimo del 20%, calcolato a partire da 21° transito che dà diritto all' 1% del pedaggio complessivo relativo ai 21 transiti effettuati, fino al 40° compreso (20% del pedaggio complessivo relativo ai 40 transiti effettuati). L'Agevolazione finale, determinata dal numero complessivo dei transiti effettuati nel mese di calendario di riferimento, si intenderà applicata a partire dal 1° transito effettuato nel mese stesso. A titolo esemplificativo, sino a 20 transiti mensili non sarà applicato nessuno sconto; a partire dal 21° transito, l'Agevolazione (per tutti e 21 i viaggi effettuati) sarà dell'1% e crescerà linearmente (2% del pedaggio complessivo per 22 transiti effettuati, 3% per 23 viaggi…) fino al 20% del pedaggio complessivo, che si applica dal 40° transito. In particolare, quindi, agli utenti che effettuano 41 viaggi, verrà applicato su tutti e 41 e sino al 46° viaggio l'Agevolazione del 20%. Resta inteso che per i transiti successivi al 46° viaggio la tariffa applicata è quella intera e non verrà, pertanto, applicata alcuna riduzione. L'importo dello sconto verrà arrotondato matematicamente sul singolo transito al centesimo di Euro.

Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e di debolezza del progetto

Analisi della circolare esplicativa

Sino a 20 viaggi

$21 \le n° viaggi \le 40$

$41 \le n° viaggi \le 46$

Oltre i 46 viaggi

- Sconto nullo
- Percentuale di sconto in aumento lineare di +1% a viaggio
- Percentuale di sconto del 20%
- Sconto nullo

Le equazioni

y=spesa x=nr viaggi

C=costo unitario della tratta

Sino a 20 viaggi $y = c \cdot x$

$21 \leq n°viaggi \leq 40$

$$y = c \cdot x - c \cdot x \cdot \frac{(x-20)}{100}$$

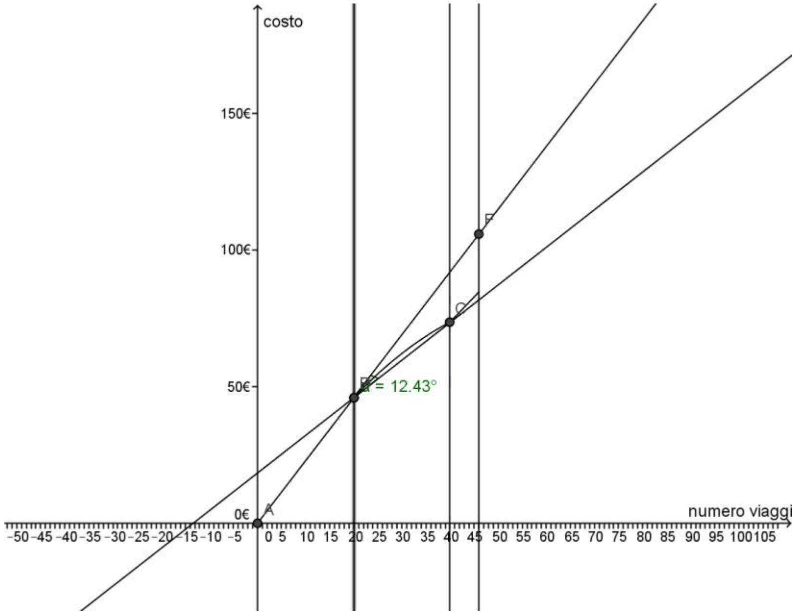
$$y = -\frac{c}{100}x^2 + \frac{6}{5}cx$$

$41 \leq n°viaggi \leq 46$

$$y = c \cdot x - c \cdot x \cdot \frac{20}{100}$$

Oltre i 46 viaggi $y = c \cdot x$

Grafici a confronto



Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e di debolezza del progetto

Conclusioni addotte dal modello

"Fraintendimenti" tra percentuale di sconto che cresce linearmente e sconto applicato

Un altro problema di interpretazione del testo nel segmento D

- L’abbiamo riscontrato in gruppi classe diversi e in anni differenti quando proponevamo il problema del kerosene per jet

…Il testo del problema

- Il kerosene utilizzato come carburante dei jet viene depurato mediante filtraggio attraverso un'apposita condotta contenente argilla. Supposto che ogni foot di condotta riesca a rimuovere il 20% di impurità quanto deve essere lunga la condotta per ottenere un abbattimento degli inquinanti del 75%?

- La problematica rilevata era nell'interpretazione del dato :

  "ogni foot di condotta riesca a rimuovere il 20% di impurità" e

  la richiesta: "ottenere un abbattimento degli inquinanti del 75%?"

  Il nostro intervento è stato volto a sciogliere il nodo provocato dal testo.

…… la progressione è $P_n = (0,8)^n P_0$

(ad ogni passaggio c'è un abbattimento del 20%)

Per rispondere al quesito bisognava risolvere la disequazione:

$$P_0 \cdot (0,8)^n < P_0 \cdot 0,25$$

$$(0,8)^n < 0,25$$

che grazie al grafico

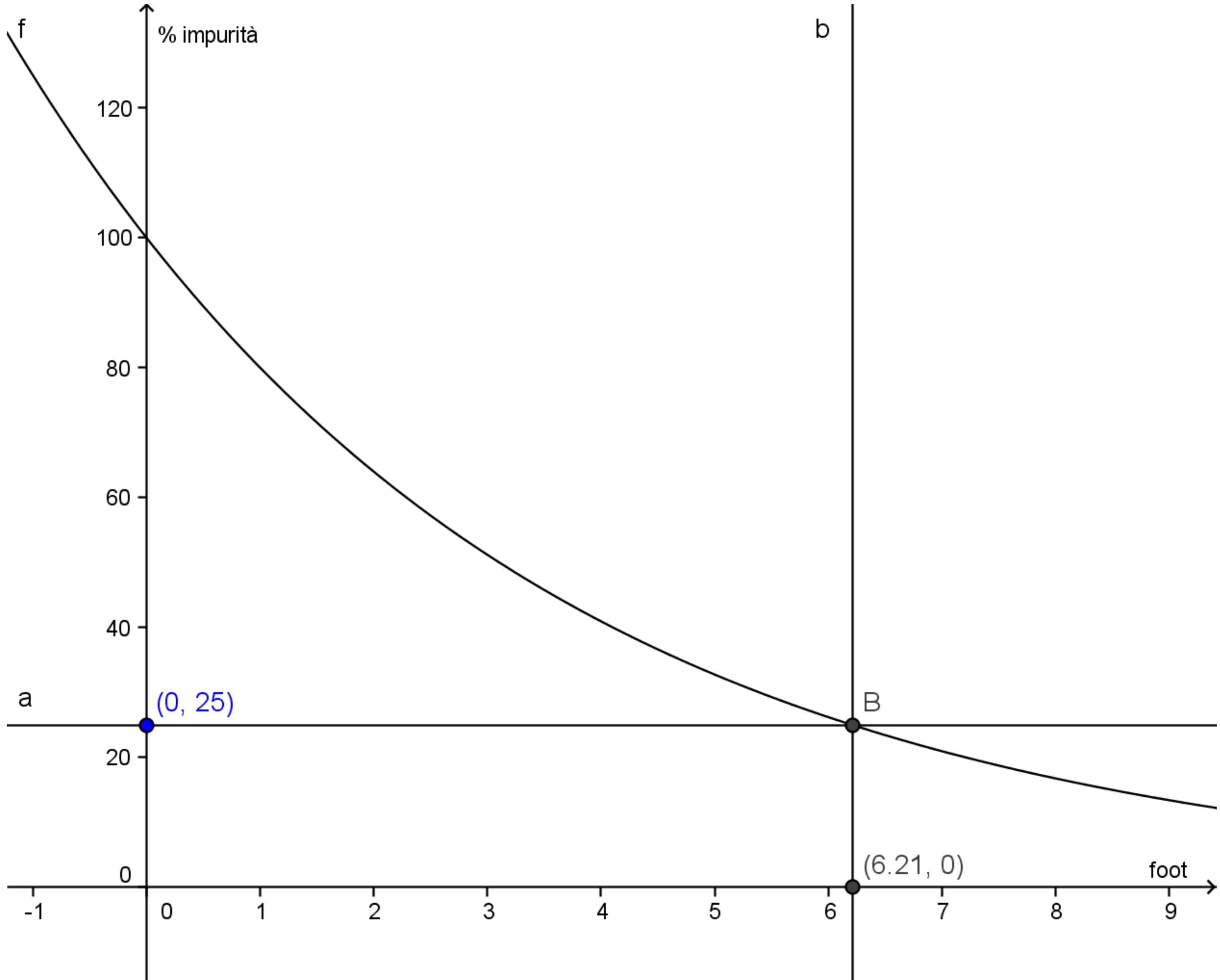
- Gli allievi proponevano:

$$P_n = (0,2)^n P_0$$

$$P_0 \cdot (0,2)^n < P_0 \cdot 0,75$$

$$(0,2)^n < 0,75$$

Il passaggio linguistico infatti generava ambiguità tra la quantità di materiale abbattuto e il materiale che conteneva ancora inquinante



Ferrari-Iaderosa, "Riflessioni didattiche sui punti di forza e
di debolezza del progetto

Il metodo

- Gli allievi avevano dimostrato, una volta modellizzato in modo corretto, una più agile risoluzione con il metodo grafico piuttosto che con il II metodo proposto di stampo algebrico

$$\ln(0,8)^n < \ln(25)$$

$$n\ln(0,8) < \ln(25)$$

$$n > \frac{\ln 25}{\ln(0,8)} \cong 6,21$$

Conclusioni

I punti di attenzione che proponiamo per un confronto e un dibattito costruttivo all'interno del gruppo che sperimenta il progetto:

1) **Riflessione sui testi con i ragazzi** ed esplicitazione degli impliciti e dei significati del lessico usato
2) **Osservazione delle situazioni in cui le nuove tecnologie riescono a mediare le difficoltà di modellizzazione** (interpretazione grafica prima di quella algebrica, per facilitare quest'ultima)
3) **Confronto** sulle maggiori **difficoltà** poste dai materiali comuni, e sulle **strategie didattiche** adottate