La principessa Didone e il problema del buco ottimale

Luca Granieri

Università Federico II Napoli, Politecnico di Bari
luca.granieri@unina.it, granieriluca@libero.it

Presentiamo alcune idee dai lavori scientifici:

1. P. D'Ambrosio, D. De Tommasi, L. Granieri, F. Maddalena, A surface energy approach to the mass reduction problem for elastic bodies, IMA Journal of Applied Mathematics 74 (2009), 934-949.
2. L. Granieri, F. Maddalena, On some variational problems involving volume and surface energies, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 146, Issue 2 (2010), 359-374.
3. R. Fosdick, L. Granieri, F. Maddalena, Reformation Instability in Elastic Solids, Journal of Elasticity, 107, No. 2 (2012), 131-150.
4. Gabriele Tagarelli. Problemi variazionali a dominio variabile e applicazioni. Tesi di laurea in Matematica, Università di Bari, A.A. 2009-2010.

Problema isoperimetrico

Problema isoperimetrico

1. L. Granieri, Elementi di Matematica. Matematica Elementare pre-Universitaria, La Dotta, 2013.
2. L. Granieri, Sulla misura del cerchio, Alice e Bob n. 35 aprile 2013, MATEpristem Università Bocconi.
3. L. Granieri, Ottimo in Matematica, in preparazione.
4. R. Courant, H. Robbins, Che Cos'è la Matematica?, Bollati Boringhieri, 1971.
5. S. Hildebrandt and A. Tromba. Principi di minimo. Forme ottimali in natura. Edizioni della Normale, Pisa, 2007.
6. Piero D'Ancona, Eugenio Montefusco, Il dubbio di Didone.
7. T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov, Geometric Problems on Maxima and Minima, Birkhauser, 2006.
8. E. Giusti, La Matematica in Cucina, Boringhieri, 2004.
9. V.M. Tikhomirov, Stories about Maxima and minima, AMS, 1990.

Buco ottimale

Si tratta di alleggerire una struttura elastica (edificio, carrozzeria, ecc.). Ad esempio ricavare una finestra in una parete. Come ricavare una finestra ottimale?

Buco ottimale

Si tratta di alleggerire una struttura elastica (edificio, carrozzeria, ecc.). Ad esempio ricavare una finestra in una parete. Come ricavare una finestra ottimale? Chiaramente occorre prescrivere la quantità di materiale da asportare. Se la parete è omogenea, ciò significa determinare la forma geometrica piana del buco.

Buco ottimale

Si tratta di alleggerire una struttura elastica (edificio, carrozzeria, ecc.). Ad esempio ricavare una finestra in una parete. Come ricavare una finestra ottimale? Chiaramente occorre prescrivere la quantità di materiale da asportare. Se la parete è omogenea, ciò significa determinare la forma geometrica piana del buco. A parità di area, qual è la forma geometrica migliore?
Se chiediamo di "'ritagliare"' il meno possibile, si tratta di scegliere il perimetro minimo possibile. Abbiamo allora il problema isoperimetrico, non esattamente (duale)

Problema isoperimetrico vincolato

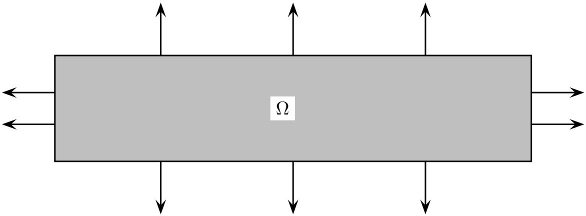
Il cerchio è soluzione del problema isoperimetrico nel piano. Ma noi siamo vincolati a fare il buco nella parete. Il problema vincolato è molto più diffficile e presenta numerose questioni aperte. La difficoltà principale consiste nel tener conto della geometria della parete. In tal caso, il nostro problema corrisponde al seguente problema isoperimetrico vincolato

$$\textit{Minimizzare}\,\{\mathcal{P}(K) \mid K \subset \Omega,\ A(K) = A\}\,, \tag{1}$$

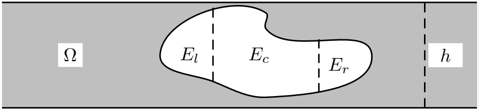
dove $\mathcal{P}(K)$ è il perimetro di K, mentre A rappresenta l'area da rimuovere da Ω per ricavare la nostra finestra.

Ora, se dentro la parete Ω è possibile piazzare un cerchio $\mathcal{C}$ di area pari ad A, allora abbiamo finito. Il cerchio $\mathcal{C}$ è la nostra soluzione, non si può fare di meglio. Il problema è allora se un tale cerchio nella parete non ci entra. Che fare allora? È abbastanza chiaro che in tal caso la geometria della parete ha la sua importanza.

Ora, se dentro la parete Ω è possibile piazzare un cerchio $\mathcal{C}$ di area pari ad A, allora abbiamo finito. Il cerchio $\mathcal{C}$ è la nostra soluzione, non si può fare di meglio. Il problema è allora se un tale cerchio nella parete non ci entra. Che fare allora? È abbastanza chiaro che in tal caso la geometria della parete ha la sua importanza.



Per semplificare le cose, consideriamo il caso in cui Ω è una striscia di altezza h. Poichè non vogliamo preoccuparci dell'altra dimensione, potremo anche supporre che abbia una larghezza molto grande, diciamo infinita.



Consideriamo questa volta il più grande cerchio $\mathcal{C}$ che è possibile piazzare dentro Ω. Il caso che ci interessa è quindi quello in cui $A(\mathcal{C}) < A$. Sia ora $E \subset \mathcal{R}$ un qualsiasi altro buco tale che $A(E) = A > A(\mathcal{C})$. Per "‘ragioni di continuità"’ è possibile trovare due linee verticali che delimitano due regioni E_l, E_r di E, entrambe di area pari a $\frac{A(\mathcal{C})}{2}$. Se D rappresenta la distanza tra queste due linee verticali, indichiamo con E_c la parte restante di E, ovvero la regione di E incastrata tra le due linee verticali.

Problema della torta

E' sempre possibile dividere una torta in due parti che abbiamo una misura prefissata.

Problema della torta

E' sempre possibile dividere una torta in due parti che abbiamo una misura prefissata.

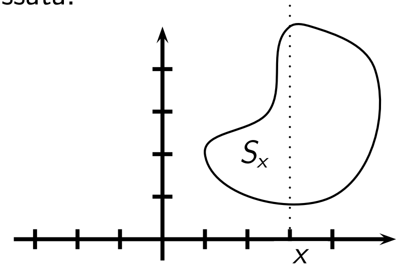


Figure: Taglio verticale

Poiché in genere le torte non spuntano fuori dal nulla, sia $0 < F < m(T)$ la frazione di torta che vogliamo ricavare con il nostro taglio. Consideriamo allora la funzione

$$f(x) = m(S_x) - F.$$

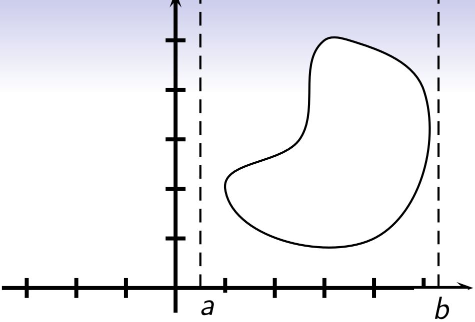


Figure: Tagli di prova

$$f(a) = -F < 0, \quad f(b) = m(T) - F > 0.$$

Allora, per il Teorema degli zeri, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero per cui

$$m(S_{x_0}) = F.$$

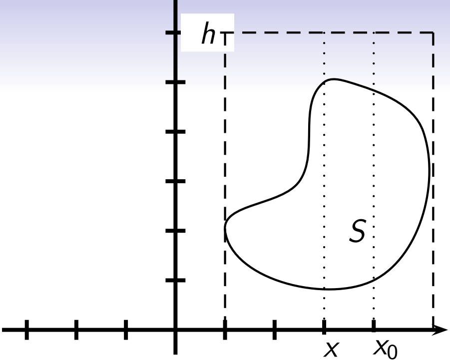


Figure: Continuità del taglio

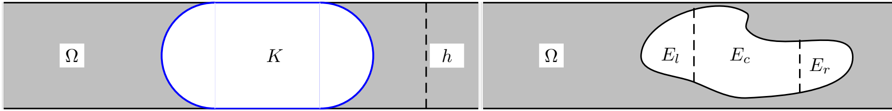
Essendo la torta limitata, e qualunque sia la sua geometria, questa può essere racchiusa in una scatola rettangolare grande all'occorrenza. Diciamo di altezza h . Se $|x - x_0| < \delta$, abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |m(S_x) - F - m(S_{x_0}) + F)| = m(S) \leq |x - x_0|h,$$

Sscegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{h}$, f risulta continua, anzi, uniformemente continua.

In dimensione più alta (problema del panino al formaggio, o prosciutto, hot-dog) il problema richiede strumenti matematici molto più sofisticati (topologia algebrica, teoria di Borsuk-Ulam)

Consideriamo ora $B = \frac{A(E_c)}{h}$ e prendiamo la regione K costituita da un rettangolo di base B e altezza h, con incollate le due metà di $\mathcal{C}$, Vogliamo dimostrare che K è il buco migliore che si possa fare.

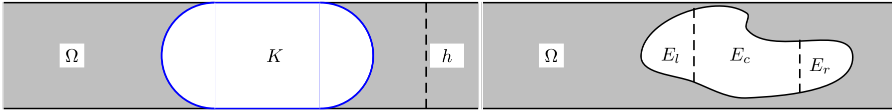


Utilizzando la proprietà isoperimetrica del cerchio

$$\mathcal{P}(E) \geq \mathcal{P}(\mathcal{C}) + 2D.$$

Confrontato E_l, E_r con le due metà di $\mathcal{C}$, e utilizzato che D è la minima distanza possibile tra le due linee verticali.

Consideriamo ora $B = \frac{A(E_c)}{h}$ e prendiamo la regione K costituita da un rettangolo di base B e altezza h, con incollate le due metà di $\mathcal{C}$, Vogliamo dimostrare che K è il buco migliore che si possa fare.



Utilizzando la proprietà isoperimetrica del cerchio

$$\mathcal{P}(E) \geq \mathcal{P}(\mathcal{C}) + 2D.$$

Confrontato E_l, E_r con le due metà di $\mathcal{C}$, e utilizzato che D è la minima distanza possibile tra le due linee verticali. Poi

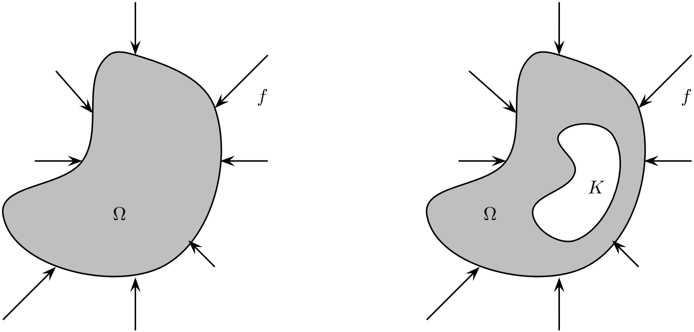
$$Bh = A(E_c) \leq Dh.$$

Pertanto,

$$\mathcal{P}(E) \geq \mathcal{P}(\mathcal{C}) + 2D \geq \mathcal{P}(\mathcal{C}) + 2B = \mathcal{P}(K).$$

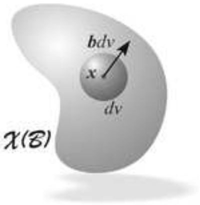
Nel caso di una regione Ω più generale, soluzioni esplicite sono più difficili da ottenere. Anzi, ad esempio, fatta eccezzione per il caso bidimensionale, anche se Ω è una regione convessa, è ancora una questione aperta se la soluzione del problema isoperimetrico vincolato è anch'essa convessa oppure no

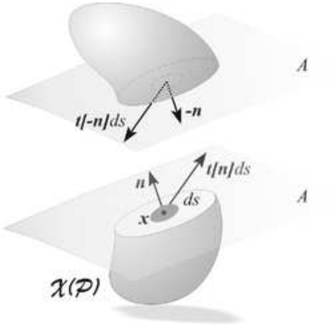
In generale occorre tenere conto di altre quantità "‘strutturali"’. In seguito ad un carico esterno la "‘deformazione"’ del corpo elastico produce uno "‘sforzo"’ e conseguente immagazzinamento di "‘energia elastica"’. A parità di carico esterno f, facendo un "‘buco"’ K lo sforzo e l’energia elastica aumentano. Sarebbe un bene minimizzare questo aumento di energia.



Problema molto difficile. Come dipende il tutto dalla forma di K? Problema largamente aperto (Problemi a dominio variabile). Intanto bisogna capire cosa succede dentro il corpo.

Tensore di Cauchy

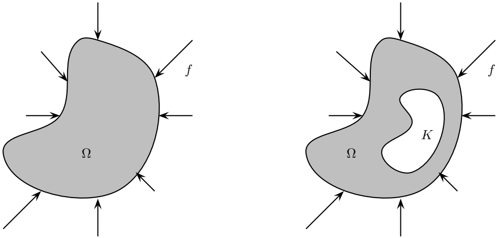




dove non arrivano i nostri occhi e le nostre apparecchiature, può arrivare la matematica. Dunque, vogliamo indagare la forza $\mathbf{f}$ agente in un punto P all'interno del corpo. Immaginiamo ora di spaccare in due il corpo come un melone con un piano passante per P. Allora, il piano è come una superficie attraverso la quale una metà del corpo interagisce con l'altra. Pertanto, ci sarà una forza che agisce lungo la perpendicolare $\mathbf{n}$ al piano. Sotto certe ipotesi, dalle leggi della meccanica si dimostra, e questo è il contenuto del celebrato Teorema di Cauchy, l'esistenza, ed unicità, di un oggetto matematico detto *tensore degli sforzi*, o *tensore di Cauchy*, T tale che la forza $\mathbf{f}$ in questione è data da

$$\mathbf{f} = T\mathbf{n}.$$

Il problema è complicato dal fatto che non è "‘ben capito"’ come lo sforzo dipende dalla geometria di K. Senza scoraggiarci, tentiamo di trovare qualcosa di più abbordabile, almeno per noi. Intanto si dimostra, teoria standard dei materiali compositi (cemento armato), che l’aumento di energia si "‘localizza"’ sul bordo di K (integrazione per parti).



si può anche dimostrare che l'energia concentrata sul bordo della finestra è sempre più piccola di quella che si otterrebbe sostituendo l'azione dello sforzo sul bordo della finestra con quella relativa allo sforzo iniziale (quello nella parete integra senza cavità). Il problema è allora

$$\mathit{Minimizzare}\left\{\int_{\partial K} |Tn(x)| \, d\mathcal{H}^2 \; : \; K \subset \Omega, vol(K) = V\right\}. \tag{2}$$

generalizzazione del problema isoperimetrico, anche noto come problema di tipo Wulff (cristallografo russo)