MATH Maps: una nuova strada che ti apre un mondo ...

Itinerari matematici per le competenze

Prima parte

Primo Brandi Anna Salvadori
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia
http://www.matematicaerealta.it

Introduzione. La Matematica, individuata da Galileo[1] come strumento indispensabile per la *descrizione e comprensione* del mondo circostante, è il linguaggio con cui si è sviluppata la Scienza e la Tecnologia.
Nonostante questo, per secoli è stata tramandata come *disciplina astratta*, appannaggio di un ristretta elite di cultori (considerati spesso un po' pazzi).
Sorprendentemente, negli ultimi anni si è verificato un profondo mutamento culturale: la matematica ha assunto anche il ruolo di efficace *strumento di comunicazione*; sempre più spesso i mezzi d'informazione e i canali pubblicitari la affiancano al linguaggio naturale come potente strumento di rappresentazione.

Questo mutamento è stato recepito dal mondo della Scuola con una inusuale tempestività.
Infatti, la direttiva europea sulle "Competenze chiave di cittadinanza (da acquisire al termine dell'istruzione obbligatoria)" cita esplicitamente il *linguaggio matematico,* affiancandolo a quello naturale, come strumento di comunicazione[2].
Anche le recenti indicazioni ministeriali sui nuovi curricula della scuola superiore si riferiscono espressamente *alla modellizzazione matematica e alla specificità che essa istituisce fra matematica e realtà* per la formazione di competenze; inoltre pongono come obiettivo fondamentale *l'acquisizione di strumenti matematici necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate.*
La Scuola si trova quindi di fronte ad una sfida impegnativa, irta di difficoltà che tuttavia offre una opportunità unica di crescita culturale.

MATH Maps nasce dalla ventennale esperienza di Matematica&Realtà[3] (M&R) con l'obiettivo di fornire al mondo della Scuola un sussidio didattico, uno strumento di dialogo e confronto e, perché no, di discussione! E' una opera "corale" di tutti i collaboratori M&R, in continua evoluzione, strutturata in percorsi che evolvono in una elica ascendente (http://www.matematicaerealta.it).

---

[1] "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri , né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi mezzi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto ", Galileo Galilei, da *Il Saggiatore*.

[2] Comunicare: comprendere messaggi di genere diverso (quotidiano, letterario, tecnico, scientifico) e di complessità diversa, trasmessi utilizzando linguaggi diversi (verbale, matematico, scientifico, simbolico, ecc.) ... o rappresentare eventi, fenomeni, principi, concetti, norme, procedure, atteggiamenti, stati d'animo, emozioni, ecc. utilizzando linguaggi diversi (verbale, matematico, scientifico, simbolico, ecc.) [http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all2_dm139new.pdf]

[3] Matematica&Realtà (M&R) [http://ww.matematicaerealta.it] è un progetto di innovazione didattica che promuove la Matematica come *linguaggio chiave per interpretare e comprendere la Realtà*. Punto centrale della proposta è una interazione tra mondo reale e mondo matematico, basata su una dinamica di insegnamento-apprendimento fortemente orientata all'acquisizione di competenze e non si limita alla sola trasmissione di conoscenze e abilità.

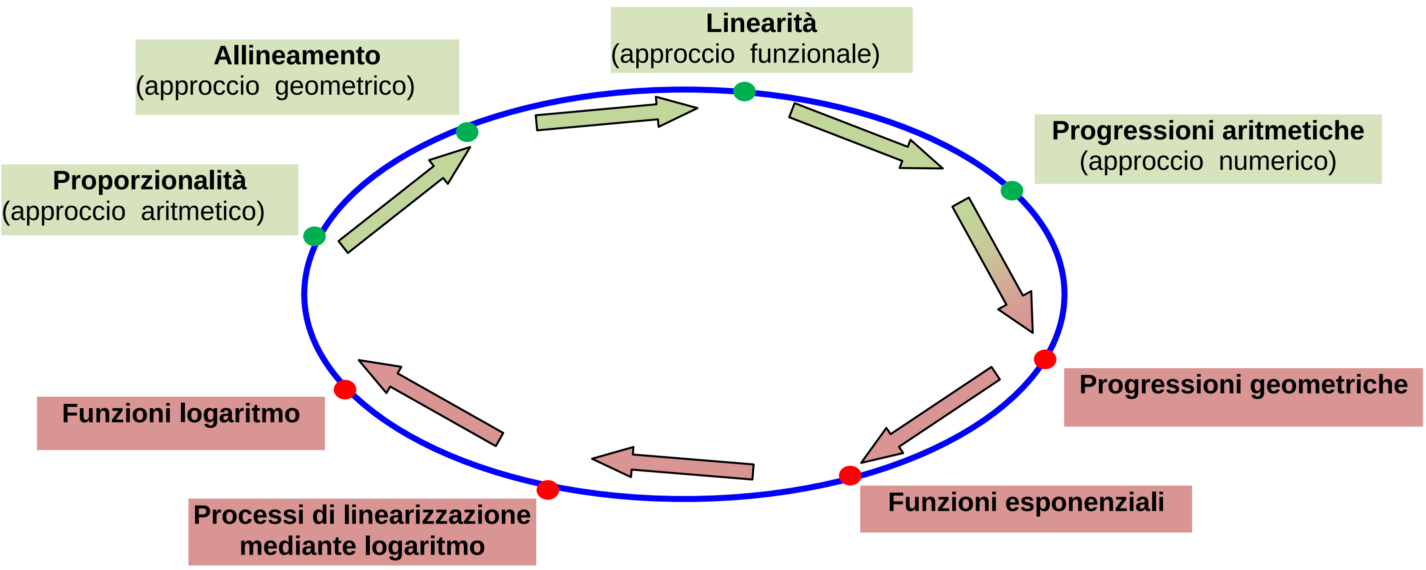
La proposta comporta *un radicale rinnovamento* della didattica basato sulla *educazione alla modellizzazione* con strumenti elementari. Non consiste semplicemente nell'arricchire il percorso didattico con un ventaglio di applicazioni tratte dalla vita quotidiana, ma è piuttosto un invito ad impostare il processo educativo ancorandolo alla modellizzazione della realtà, secondo linee guida collegate da temi trasversali che costituiscono un saldo sostegno per le volute dell'elica.

Le linee guida sono le nostre *autostrade*, fungono da filo conduttore per l'intero percorso educativo, generano nei discenti una immagine unitaria e coadiuvano gli insegnanti nel progettare percorsi didattici non frammentari, per tutte le fasce di età (dalla scuola dell'obbligo all'università), calibrati secondo le varie esigenze curriculari e al livello dei discenti.
Alcune linee guida del processo educativo:

- linguaggio naturale & linguaggio matematico in sinergia
- codici e rappresentazione *grafica* della realtà
- corrispondenze e relazioni nella vita quotidiana
- fenomeni e modelli lineari
- dai modelli lineari ai primi modelli non lineari
- dai modelli statici a quelli dinamici (processi iterativi)
- calculus in context
- dal discreto al numerabile, al continuo e riduzione del continuo al numerabile, al discreto

Il *cerchio magico* della linearità

Una delle *direttive* principali è il così detto "cerchio magico", un percorso ideale sulla *linearità* che si sviluppa in continuità fra la Scuola Superiore di primo e secondo grado, sebbene una prima idea sulla proporzionalità si può ravvisare nella scuola primaria nell'ambito delle frazioni.



Il presente volume illustra il percorso relativo al primo biennio (semicerchio superiore), mentre quello del secondo biennio (semicerchio inferiore) apparirà in un volume successivo.
La stazione di partenza è la proporzionalità (diretta) riguardata come corrispondenza che conserva i rapporti di grandezze omogenee (*approccio aritmetico*).

Il percorso inizia, come di consueto, da situazioni e fenomeni della vita reale con l'intento di stabilire se le grandezze coinvolte siano o meno direttamente proporzionali.
Questa attività offre l'opportunità per "rileggere" il concetto di proporzionalità da un nuovo punto di vista. L'usuale *approccio aritmetico* è tradotto in un *approccio funzionale* (rapporto costante fra elementi corrispondenti) che ammette una interessante *rappresentazione geometrica* (le coppie di elementi corrispondenti costituiscono punti allineati con l'origine).
Interpretare la proporzionalità come corrispondenza lineare fra grandezze, $y = kx$, consente di adottare questo concetto come potente modello di descrizione in varie situazioni del quotidiano, ove la costante di proporzionalità k assume un preciso significato (costante di conversione fra unità di misura, peso specifico, coefficiente di dilatazione, percentuale di sconto o rivalutazione, etc.).
Inoltre l'equivalenza fra proporzionalità ed allineamento con l'origine può essere utilizzata come un potente strumento per stabilire a colpo d'occhio, per via geometrica, se due classi di grandezze siano in proporzionalità diretta.

Andando oltre e indagando altre situazioni della realtà, si *generano* classi di grandezze (in corrispondenza biunivoca) ove le coppie di elementi corrispondenti rappresentano punti allineati, non necessariamente con l'origine. Ricorrendo ad una traslazione, è immediato provare che le differenze di coordinate omonime sono in proporzione. Come conseguenza, la condizione di allineamento di un generico punto $P = (x, y)$ con due punti assegnati $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ equivale alla uguaglianza

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

che fornisce l'equazione della retta $y = kx + q$.
Il modello presenta ora due parametri che hanno ancora una volta un ruolo significativo: q (intercetta all'origine) descrive i costi fissi di una tariffa, il valore della variabile all'*anno zero*, etc ..., mentre k rappresenta il *tasso di variazione*, una velocità media, un consumo medio, etc ...
Estendendo le strutture algebriche dai numeri reali ai polinomi, il processo consente di introdurre, in modo *naturale* le equazioni (come modelli di equilibrio), le disequazioni (modelli di confronto), i sistemi (modelli di scelta) e di passare, con l'introduzione dei parametri, dalle espressioni numeriche a quelle letterali.
Facendo un altro passo nel processo a ping-pong fra mondo reale e mondo matematico, emerge l'esigenza di passare da una descrizione statica ad una dinamica.
Il *modello lineare dinamico è* un processo "ricorsivo" ad incremento costante del tipo

$$x_0 \quad x_1 = x_0 + d \quad x_2 = x_1 + d \ \ldots \ x_{n+1} = x_n + d$$

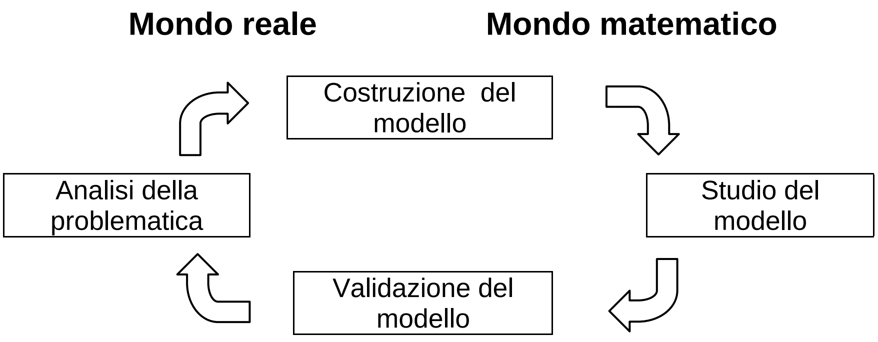
La successione $(x_n)_n$ delle iterate è una progressione aritmetica $x_n = x_0 + nd \quad n \in N$, avente come curva sostegno la retta di equazione $y = x_0 + dx$, ove lo start x_0 è l'intercetta all'origine e l'incremento d è il tasso di variazione.
Infine, come proprietà caratteristica dei processi lineari, abbiamo provato che un processo lineare trasforma progressioni aritmetiche in progressioni aritmetiche o, in altre parole, scale di misura lineari in scale di misura lineari.

Il tentativo di adottare questo modello iterativo per lo studio di fenomeni di *evoluzione* (come i processi biologici) evidenzia la sua inadeguatezza e conduce in modo costruttivo a modelli geometrici, le cui iterate costituiscono una progressione geometrica $x_n = x_0 k^n \quad n \in N$, avente come curva supporto la funzione esponenziale $y = x_0 k^x$.

Questo sarà il punto di partenza della seconda parte di questo quaderno.

Il modello matematico

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.
Il modello matematico di un "fenomeno" del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua "simulazione", utilizzando un linguaggio simbolico universale.
Il processo di modellizzazione procede per fasi successive, che creano un'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.



Fasi del processo di modellizzazione

Fase 1 <u>Analisi della problematica</u>. Si prende in esame la problematica in oggetto e si cerca di stabilire quali siano i dati noti e quali quelli incogniti. Si individuano eventuali legami tra le variabili in gioco e/o eventuali vincoli imposti dalla situazione.

Fase 2 <u>Costruzione del modello</u>. Dopo aver eventualmente semplificato il problema da affrontare (es. eliminando alcune variabili o scomponendo il problema in sotto-problemi) si traduce la questione in relazioni matematiche tra i dati e le incognite.

Le prime due fasi costituiscono il passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono "tradotti in linguaggio" matematico (modello).

Fase 3 <u>Studio del modello</u>. La fase si svolge tutta all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello. Si discute e (se possibile) si risolve il modello matematico. Importante distinguere i tre aspetti: esistenza, unicità, calcolo delle soluzioni (esatto o approssimato)

La costruzione e lo studio del modello promuovono un'analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.

Fase 4 <u>Validazione del modello</u>. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per confrontare la soluzione del modello con il problema iniziale. Questo raffronto è fondamentale in quanto consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Se la verifica delle soluzioni trovate "a tavolino" rivela delle inadeguatezze *con la realtà*, si può procedere a un secondo processo di modellizzazione, che tenga conto delle questioni emerse nel primo tentativo. Si individua così un modello più adatto a gestire il problema in esame.
Successivi perfezionamenti o varianti conducono ad un prototipo virtuale via via più efficiente. Questa progressiva evoluzione richiede in genere strumenti e tecniche matematiche sempre più complessi e articolati.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po' come si fa con le costruzioni *Lego*[4], in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. E' in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

Modellizzazione e strategie didattiche

Visti gli spazi sempre più esigui riservati all'insegnamento della matematica, non è proponibile una educazione alla modellizzazione *come scoperta*, ma la si può guidare come *bisogno intellettuale*. Ricorrendo alle collaudate tecniche di marketing, gli insegnanti dovrebbero far nascere negli studenti, di volta in volta, "nuovi bisogni di curiosità intellettuale" per poi *guidarli* sulla *via della loro soddisfazione*.
La stessa dinamica della modellizzazione dovrebbe guidare il percorso di insegnamento-apprendimeto.

Fasi 1-2

Fase 3

Partendo da situazioni e problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione matematica (modello), si possono introdurre in modo naturale concetti e strumenti matematici che vengono acquisiti e testati nella fase dello studio del modello matematico.

Fase 4

La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e far emergere nuove esigenze.

ping-pong

A sua volta, l'acquisizione di strumenti matematici sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.
In questo modo, come in un gioco a ping-pong tra mondo reale e mondo matematico, il percorso si evolve in un'elica ascendente.

Alcune raccomandazioni

L'esperienza maturata negli ultimi 20 anni, prima con i percorsi Orientamatica[5] e successivamente nei laboratori Matematica&Realtà, nonché nei nostri corsi universitari, ci induce a formulare alcuni suggerimenti per chi intende intraprendere il percorso di educazione alla modellizzazione.

Intuizione e forma-lizzazione

Introdurre i concetti privilegiando un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in un secondo tempo alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria.
Incoraggiare gli studenti a proporre loro stessi definizioni e a costruire dimostrazioni.

4 aspetti

Strumenti e tecniche dovrebbero essere presentati avvalendosi di quattro aspetti: la descrizione verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio matematico).
Le rappresentazioni multiple incoraggiano gli studenti a riflettere sul significato di quanto viene loro proposto.

Problemi veri

Si raccomanda di proporre **solo problemi veri**, non verosimili!
Le problematiche saranno tratte dalle mille proposte offerte dalla vita quotidiana (reperibili attraverso giornali, TV, internet, depliants pubblicitari, …) presentati nel loro contesto originale, né adattati, né semplificati, al fine di consentire una corretta educazione alla modellizzazione.

Esercizi intelligenti

Ridurre al minimo gli esercizi di routine, privilegiando le questioni che richiedono il coinvolgimento dello studente ed invitano alla riflessione.

---

[4] Le costruzioni Lego sono state introdotte recentemente come strumento didattico nelle scuole primarie.
[5] Corsi di formazione, orientamento e auto-valutazione rivolti a studenti del triennio degli Istituti Superiori con lo scopo di integrare la formazione scolastica proiettandola verso gli studi post-diploma e contemporaneamente favorire l'inserimento nel mondo del lavoro o promuovere un orientamento consapevole alla scelta universitaria.

Le parole chiave del percorso di apprendimento sono: *esplorare*, *comprendere*, *comunicare*. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a scrivere e leggere argomentazioni matematiche, discutere e riflettere sui concetti, confrontare strumenti e tecniche.

Atteggia-mento studenti

In ogni fase del percorso di apprendimento dovrebbero essere in grado di riflette su *cosa stanno facendo, perché lo fanno* e *cosa si aspettano che accada*.

Nuove tecnologie

Le nuove tecnologie offrono un'importante strumento educativo non solo perché, sollevando dagli aspetti più tecnicistici, permettono di dedicare più tempo alla comprensione dei concetti, ma anche perché pongono i ragazzi di fronte a difficoltà ed imprevisti che, se gestiti in modo consapevole e riflessivo, costituiscono un'occasione preziosa di crescita culturale.

La nostra esperienza ha evidenziato che ancorare l'insegnamento della matematica alla vita reale, oltre a stimolare l'interesse, favorisce la partecipazione attiva e responsabile, sviluppa un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, rende consapevoli delle potenzialità del linguaggio matematico e permette di valutare le proprie conoscenze, abilità e competenze.

INDICE

P.Brandi - A.Salvadori,. *MATH Maps. Itinerari per le competenze*, Quaderni Alice&Bob - PRISTEM Bocconi, Egea (2015) pp.124