

# Alcune applicazioni della Matematica a problemi industriali

Giovanni Russo  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Catania

La Matematica Applicata per una Buona Scuola

Roma 23 Febbraio 2015

# Sommario

Modelli matematici ed avanzamento della Scienza

Alcuni esempi classici

Altri esempi più recenti:

- Progettazione di airbag
- Applicazioni all'industria tessile
- Applicazioni all'ambiente: simulazioni di colate laviche
- Simulazione di protesi del ginocchio
- Applicazioni allo spettacolo: ambienti simulati nei cartoni animati

# Applicazioni classiche

Tutta l'ingegneria si basa sulle applicazioni della matematica a problemi del mondo reale.

Basti pensare ai circuiti elettrici, o alla costruzione di grandi strutture.

Applicazione prototipo: Circuiti elettrici

Descrizione di un circuito [a parametri concentrati](#).

La struttura è descritta da un oggetto matematico chiamato [grafo](#).

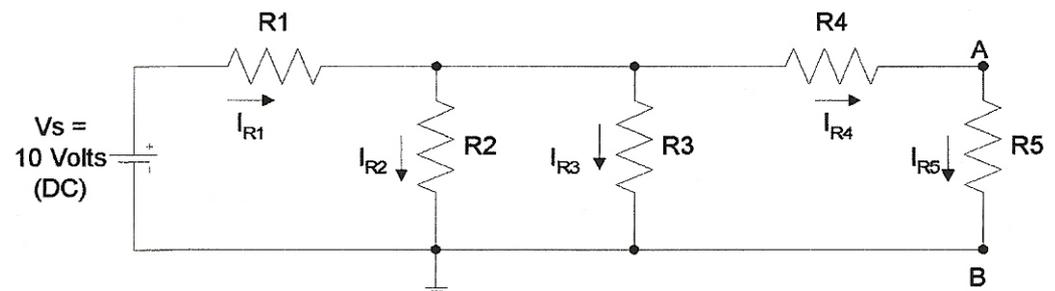
l'evoluzione delle correnti nei componenti di un circuito è descritta da un sistema di [equazioni differenziali ordinarie](#).

Nei casi più semplici,

l'evoluzione

del circuito può essere calcolata

a mano con carta e penna.



$$\begin{aligned} R1 &= 470 \, \Omega & R2 &= 2.2 \, \text{k}\Omega & R3 &= 4.7 \, \text{k}\Omega \\ R4 &= 680 \, \Omega & R5 &= 3.3 \, \text{k}\Omega \end{aligned}$$

# Simulazione circuitale

Circuiti non lineari di grandi dimensioni sono descritti da un complesso sistema di equazioni, chiamate **differenziali-algebriche** con un elevato numero di variabili (un milione e più incognite che dipendono dal tempo).

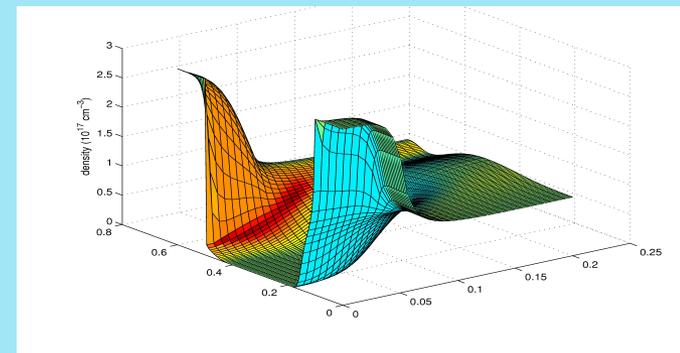
Occorre utilizzare metodi appropriati per la risoluzione di tali sistemi di equazioni, metodi che vengono studiati da una disciplina chiamata **Analisi Numerica**, che fa da tramite fra la formulazione matematica di un problema e la possibilità di calcolarne accuratamente le soluzioni.

Per poter simulare un circuito si richiede la conoscenza delle **caratteristiche dei dispositivi** dei quali il circuito è composto.

Le caratteristiche di un dispositivo (resistore, condensatore, transistor, diodo, etc.) dipendono dalla struttura fisica del dispositivo (es. dalle dimensioni del canale e dai profili di drogaggio per un diodo).

Simulazione al computer a livello di dispositivo: a seconda delle dimensioni fisiche del dispositivo, si possono usare modelli matematici adeguati di crescente accuratezza nella descrizione fisica (e conseguente complessità computazionale)

Simulazione densità portatori in dispositivo bidimensionale [V.Romano, DMI]



- drift-diffusion
- idrodinamico
- cinetico
- quantistico



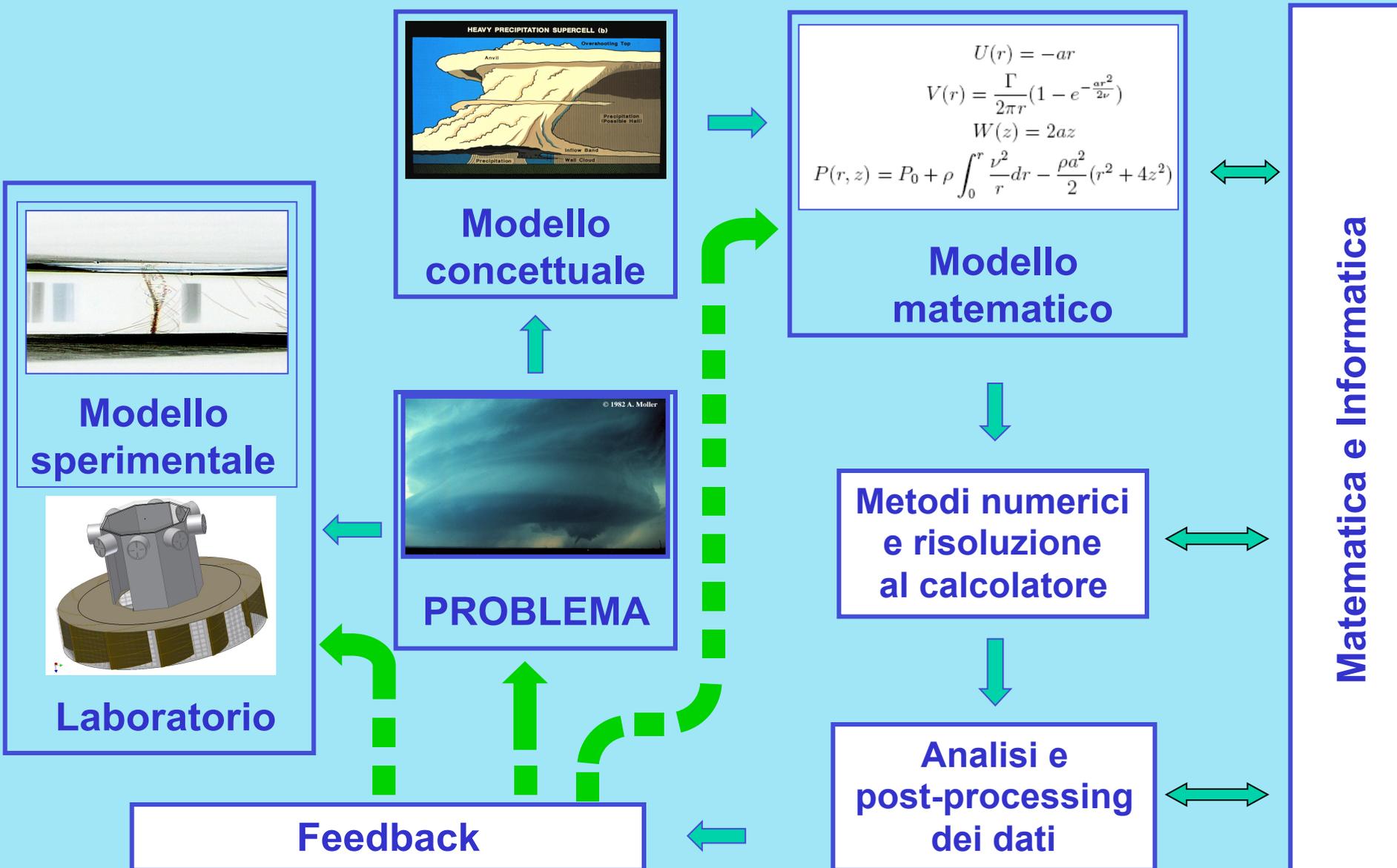
Complessità

# Altre applicazioni tradizionali

- Progettazione di aerei (simulazione della aerodinamica dei profili alari, simulazione dei fusti nei turboreattori)
- Statica e dinamica di strutture (soluzione al computer delle equazioni che descrivono la dinamica di continui deformabili)
- Previsione meteorologiche (soluzione delle equazioni alle derivate parziali che descrivono la fisica dell'atmosfera, tenendo conto anche delle misurazioni in tempo reale)
- Tomografia assiale computerizzata (TAC): le immagini ricostruite al computer in base ai segnali rivelati a seguito dell'assorbimento dei tessuti sono ottenute mediante un procedimento matematico, l'inversione della *trasformata di Radon*

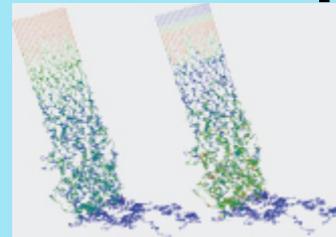
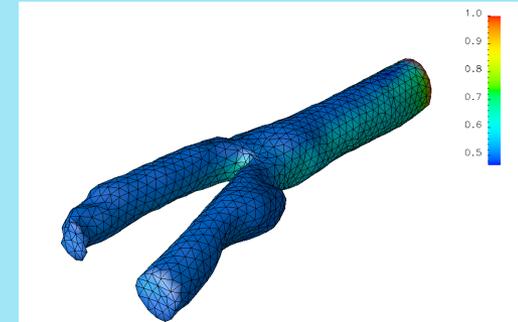
La modellistica matematica gioca un ruolo fondamentale nell'avanzamento della scienza, e spesso fa da tramite fra le osservazioni di un fenomeno, e la capacità di previsione.

# Applicazione della Matematica al mondo reale



# Nuove applicazioni della matematica a problemi industriali

- Emodinamica computazionale: simulazione del flusso in arterie, e progettazione di *stent*, valvole cardiache, diagnostica. Modellizzazione multiscala [3D + 1D + 0D] (Quarteroni & Veneziani, MOX, Politecnico di Milano)
- Ottimizzazione del profilo dello scafo in barche da competizione, mediante simulazione al computer (MOX e EPFL, Losanna)
- Progettazione di nuove fibre tessili artificiali [nuove strutture che garantiscano migliori caratteristiche]
- Industria manifatturiera del vetro



# Un esempio in Italia: il MOX al Politecnico di Milano (Modeling and Scientific Computing)

- Diretto da Alfio Quarteroni (MOX & EPF Losanna)
- > 20 strutturati
- c.a. 20 PhD students
- + collaboratori e post docs

## **Campi di ricerca:**

Adattività di griglia

Adattività di modello

Emodinamica

Idrodinamica

Semiconduttori

Statistica

Turbolenza

Combustione

Al MOX sono stati finanziati finora  
oltre **50 progetti** (dal 2004) con

- ENI
- ENEL
- Filippi Lido (Imbarcazioni)
- Federal Mogul (parti di motori per autovetture)
- Resinex (strumenti per segnalazione marina)
- Brembo (freni per vetture)
- Società del gas
- .....

# Emodinamica (iniziato da Alessandro Veneziani)

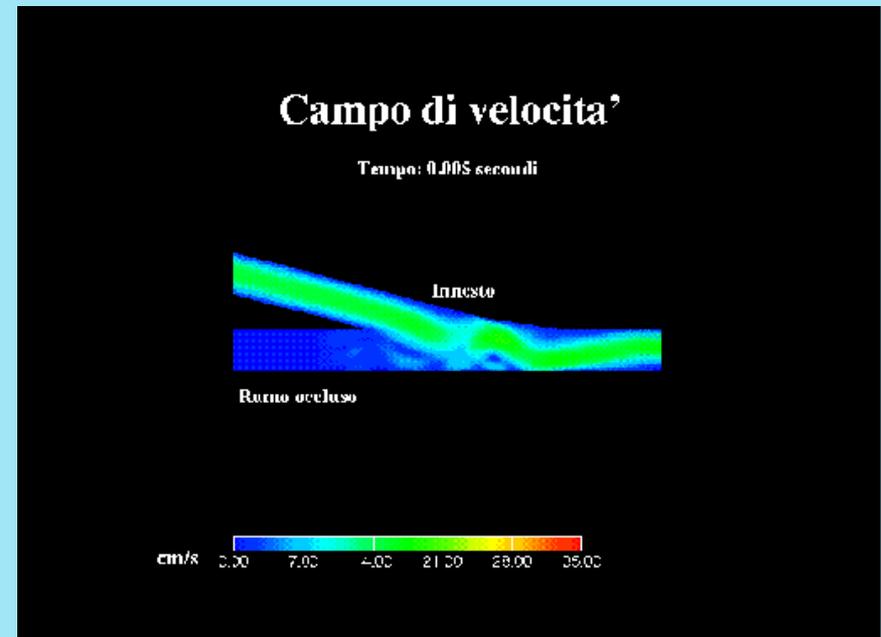
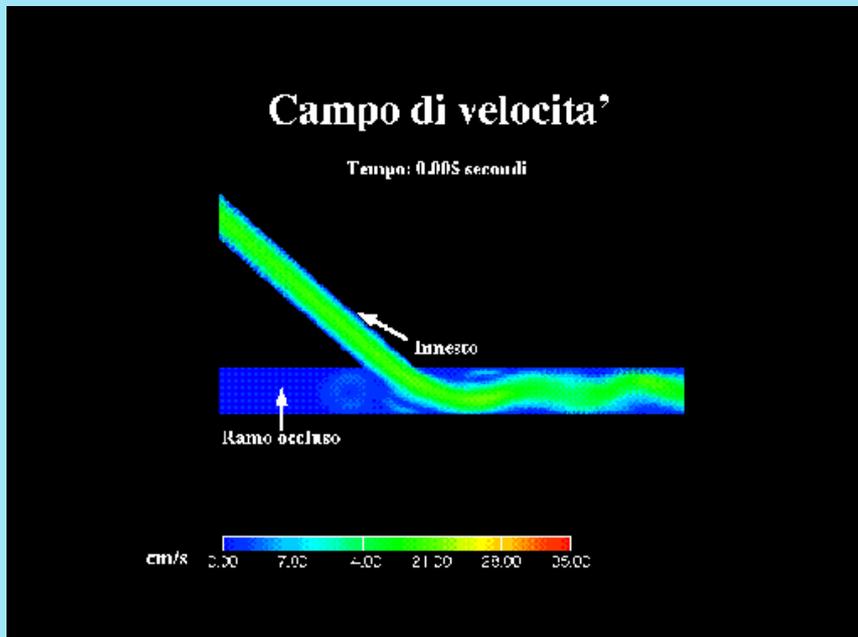
Soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes della fluidodinamica incomprimibile per un fluido (non newtoniano).

Studio della diffusione e del trasporto di soluti del sangue nei distretti vascolari

Progetto “Vene”:

modellizzazione numerica della rete venosa nel sistema cardiovascolare

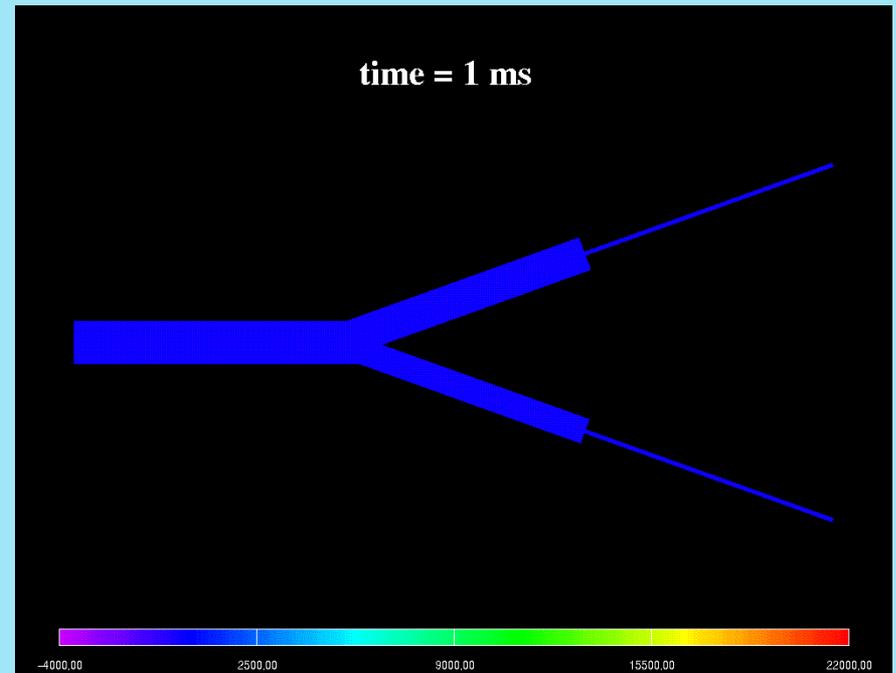
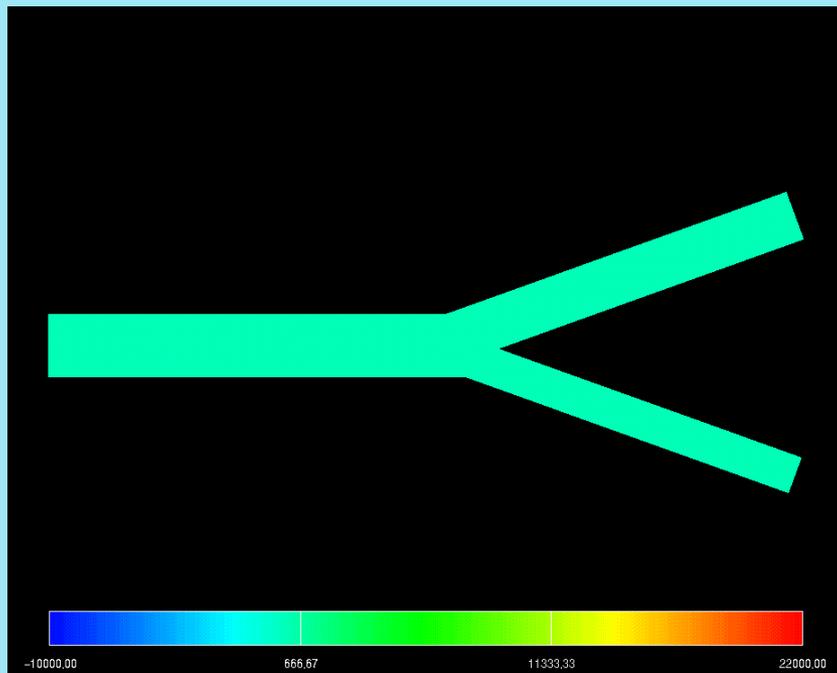
Esempio di simulazione di anastòmosi



A livello di sistema circolatorio si effettua una simulazione *multiscale*.

Il modello tiene conto della interazione fluido-parete e della elasticità dei vasi sanguigni.

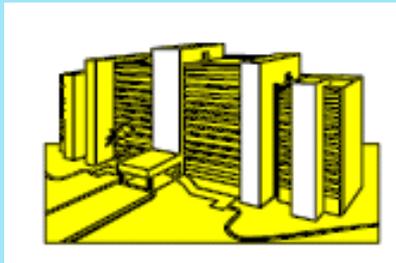
Multiscale computation (2D/1D) in a simplified model of a carotid bifurcation:  
Animations of Pressure and Streamlines



# Un esempio in Europa: ITWM - Fraunhofer Institut für Techno und WirtschaftsMathematik

ITWM è un Istituto di Matematica Applicata della Fraunhofer Gesellschaft

Profilo  
della FG:



66 Istituti di ricerca applicata



22000 impiegati



1,85 miliardi € (2011)

ITWM di Kaiserslautern: fondata nel 1995, Fraunhofer dal 2001

Fatturato in rapida crescita: 1.6 milioni nel 1995, ha raggiunto 14 milioni € nel 2008

Ca 250 impegnati, in maggioranza matematici

# La ricerca applicata all'ITWM

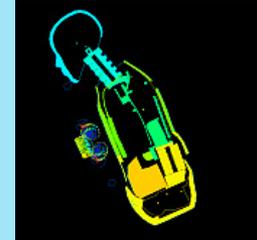
## Otto dipartimenti di ricerca

1. Processi di trasporto
2. Simulazione di flussi e materiali
3. Elaborazione di immagini
4. Analisi dei sistemi
5. Ottimizzazione
6. Matematica Finanziaria
7. Metodi matematici per la dinamica
8. Calcolo di alte prestazioni e visualizzazione

# Esempi di processi di trasporto

Simulazione della esplosione di un airbag:

Quale è l'effetto della esplosione di un airbag su un individuo, e quali danni produce ?



Raffreddamento del vetro

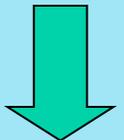
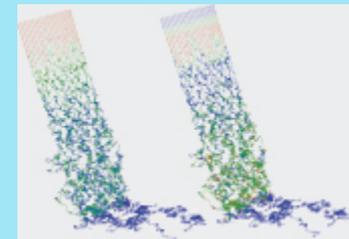
[Schott Glas, Mainz]

La dinamica del raffreddamento del vetro determina le proprietà (sforzo residuo) e quindi qualità (ottiche) del prodotto finale



Simulazione produzione di tessuto  
“non tessuto”

Dipende dalla interazione di un flusso di aria con i filamenti di tessuto



# Simulazione della esplosione di un airbag



La risposta può essere affidata ad una simulazione dettagliata

Problema matematico:

- equazioni di Navier-Stokes comprimibili in un dominio non noto a priori (problema a frontiera libera)
- interazione fluido-struttura

Discretizzazione temporale:

nota la geometria, le equazioni di NS per il gas sono risolte mediante il Finite Pointset Method (FPM), sviluppato all'ITWM, che calcola la distribuzione di pressioni sulla membrana.

Un codice agli elementi finiti calcola la nuova configurazione della membrana a seguito della distribuzione di pressione. La nuova configurazione è usata come input per FPM per il successivo passo temporale ...



Modello per il trasporto radiativo  
nello studio del raffreddamento  
del vetro.



Pacchetti commerciali: conduzione del calore  
+ legge di Stephan sulla superficie

Trasporto radiativo: la funzione incognita  $I(t, \mathbf{x}, \hat{\Omega}, \nu)$   
è il flusso di radiazione. Dipende da 7 coordinate, e  
soddisfa una complessa equazione integrodifferenziale.

All'ITMW è stato sviluppato un modello perturbativo:  
si assume che lo spessore di penetrazione della radiazione  
sia “piccolo”:  
più accurato del modello commerciale  
meno costoso del “full radiative heat transfer”



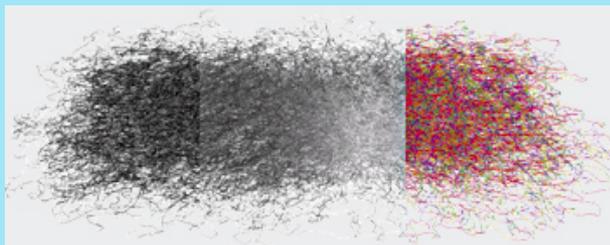
# Progettazione di nuove fibre

## Interazione fluido-struttura

Il moto delle fibre viene calcolato risolvendo le equazioni della dinamica per ciascuna fibra.

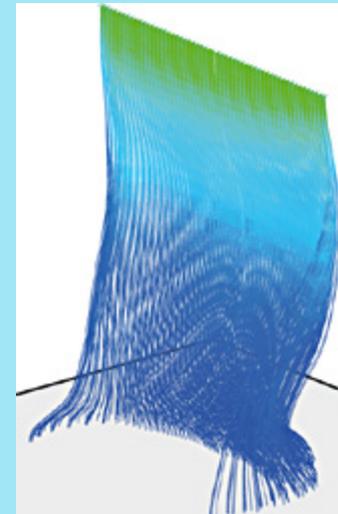
Il moto del fluido si suppone non influenzato dal moto delle fibre.

L'interazione fra le fibre viene presa in considerazione

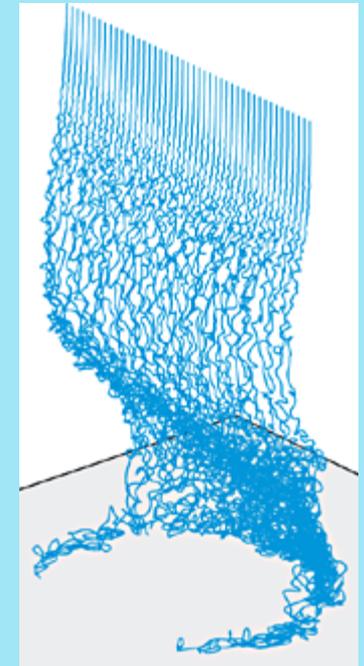


Moto di un sistema di fibre sotto l'azione di un flusso d'aria variabile

Flusso d'aria



Fibre



Dallo studio della interazione con il nastro trasportatore si può simulare la struttura (e quindi le proprietà) delle fibre



# Esempi di matematica industriale a Catania

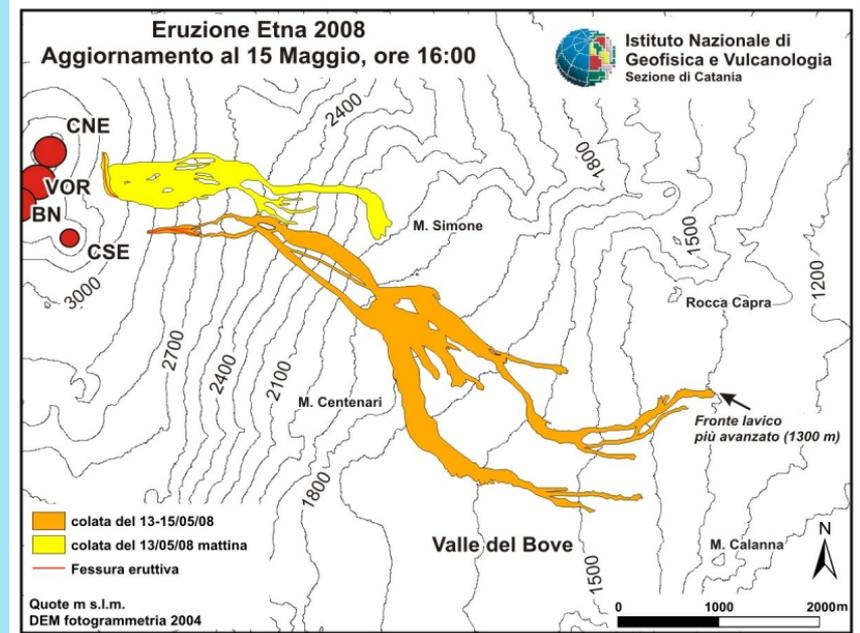
- Colate laviche
- Protesi al ginocchio

# Progetto LAVA

Convenzione INGV-  
Dip. Protezione Civile

Realization of lava flow invasion  
hazard map at mt Etna and  
methods for its dynamic update

Resp: **Ciro Del Negro**, INGV,  
**Stefano Gresta**, UniCT  
**Stefano Ciolli**, DPC



10 Research Units

RU 8 (G.R.) simulazione numerica di flussi lavici

- Modelli matematici per il raffreddamento della lava
- Metodi lagrangiani per simulazione di colate (tipo FPM)
- Metodi euleriani (griglia fissa) per problemi a frontiera mobile utilizzando tecniche *level set*

- Lava descritta come fluido di Bingham (occorre pendenza minima)
- Soluzione numeriche delle eq. di NS
- Formazione della crosta ed ingrottamento

Massa  $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla u$   $\nabla \cdot u = 0$

Quantità di moto  $\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + F$

Energia  $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla(k\nabla T) + \tau \nabla u$

## Metodo numerico:

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)  
il fluido è approssimato da un insieme di particelle interagenti

## GPU: Calcolo parallelo “a basso costo”

Le equazioni del moto delle particelle sono risolte utilizzando schede grafiche come processori. Consentono di effettuare calcoli in parallelo. Costi ridotti a causa del grande sviluppo (mercato dei videogiochi)

## Modello matematico:

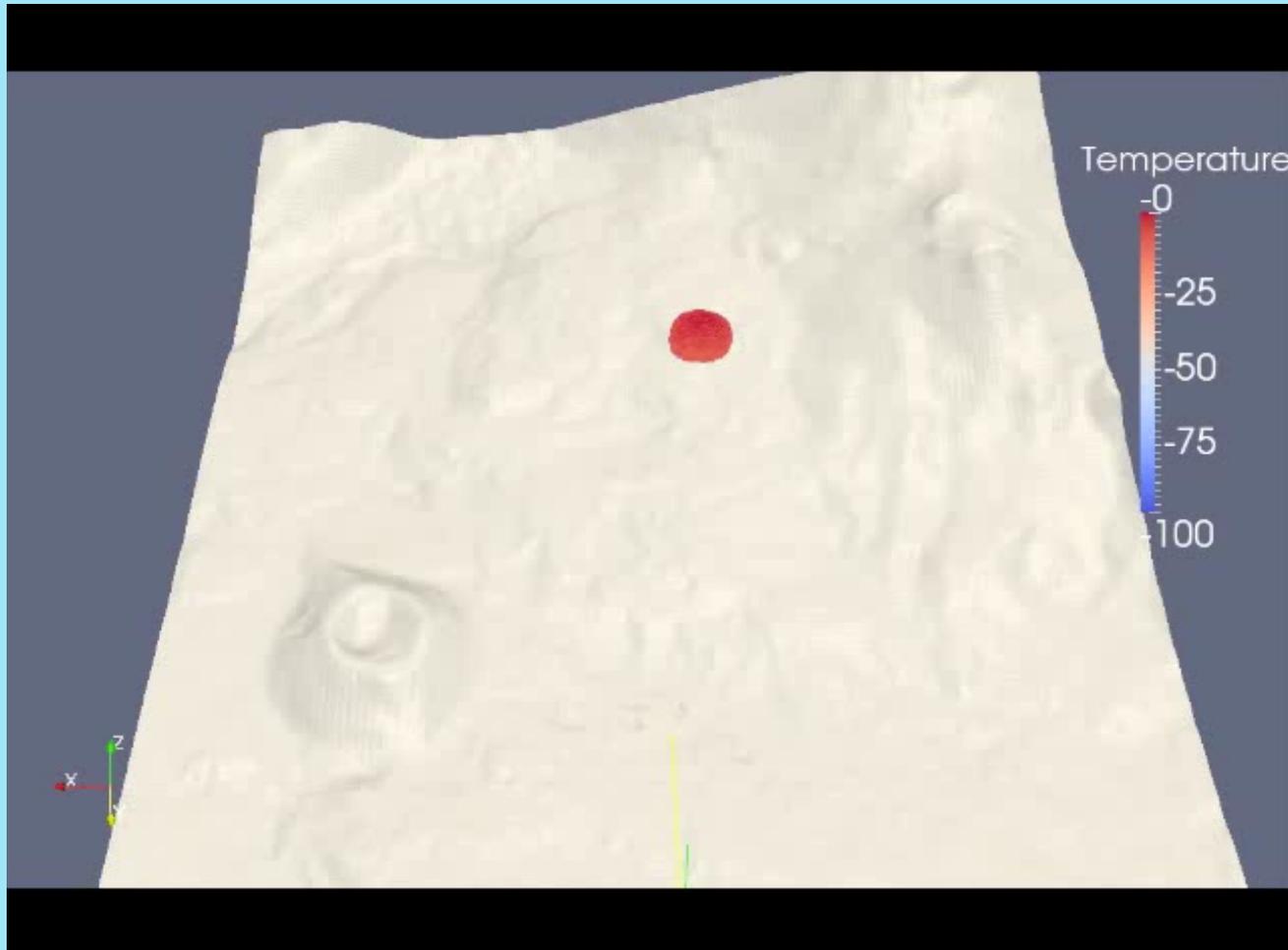
- Equazioni di bilancio con chiusura di Navier-Stokes-Fourier per un fluido debolmente comprimibile o incomprimibile
- Problema a frontiera libera (la regione occupata dalla lava non è nota a priori)
- La relazione fra  $\tau$  e  $u$  ed eventualmente  $T$  dipende dal particolare fluido (reologia)



GTX285 NVIDIA

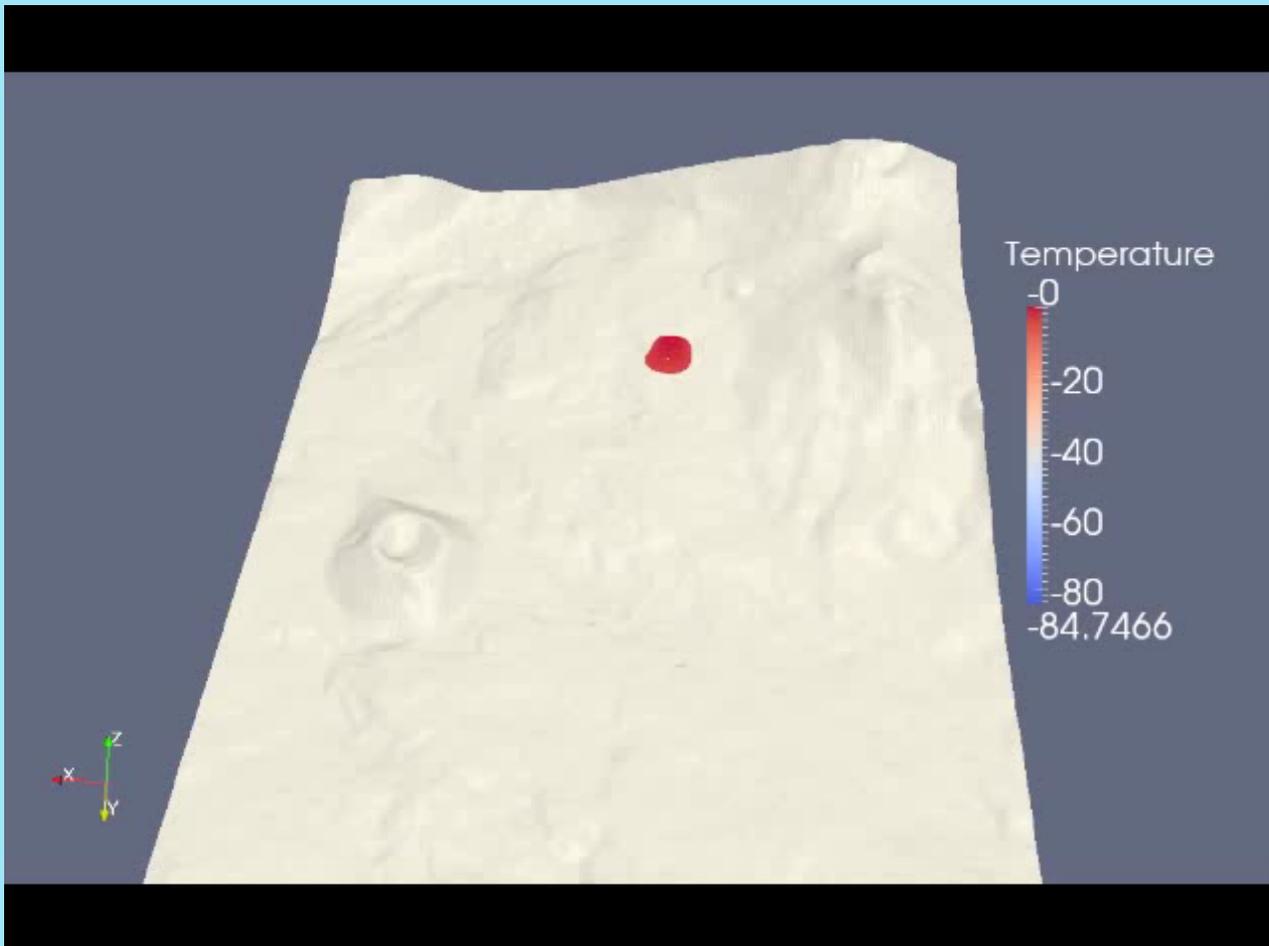
3 GTX285  
in parallelo

Simulazione di una colata lavica con SPH  
Viene calcolata anche la temperatura, ma in questo modello la reologia non dipende da T

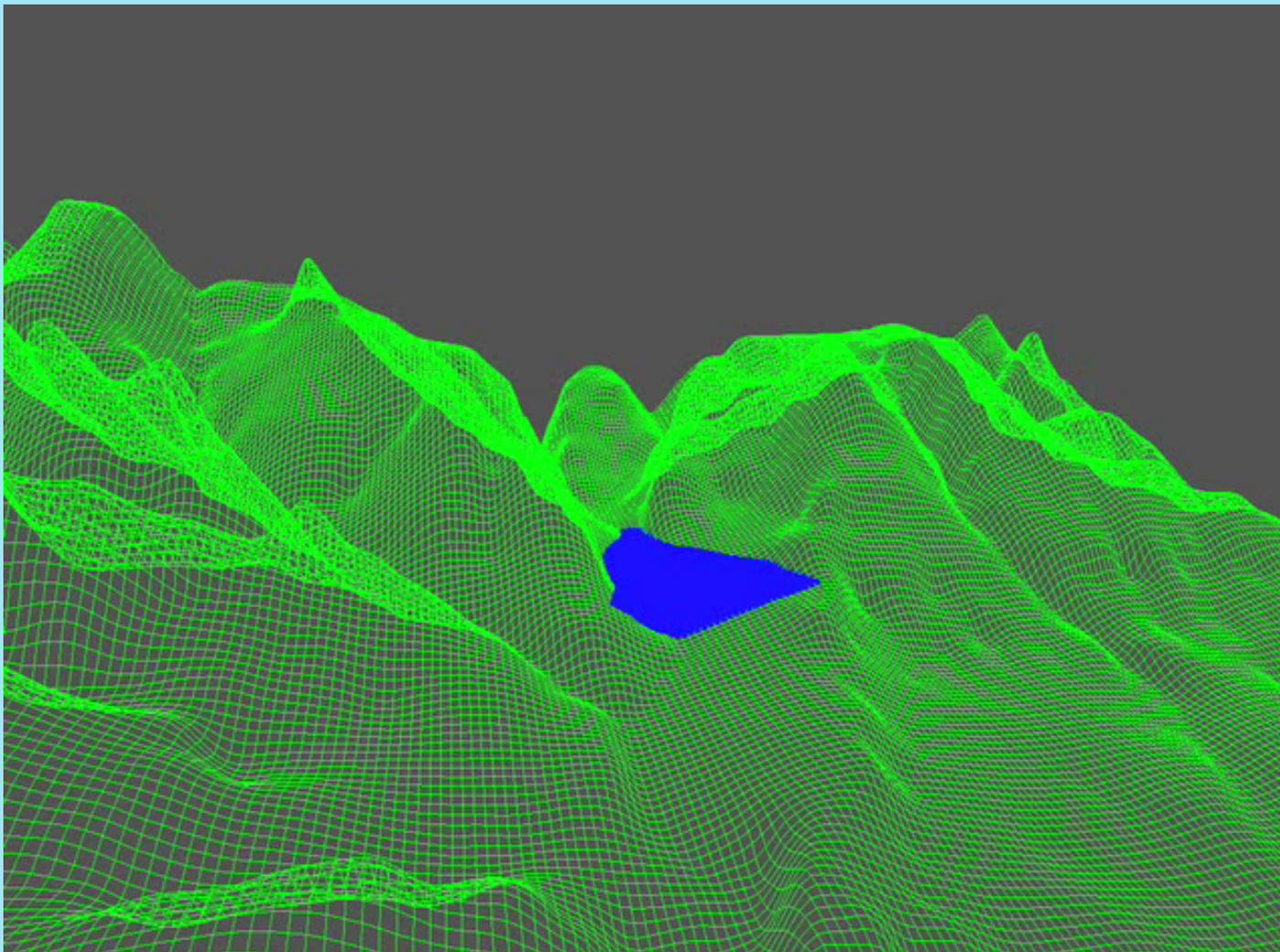


# Simulazione di una colata lavica con SPH

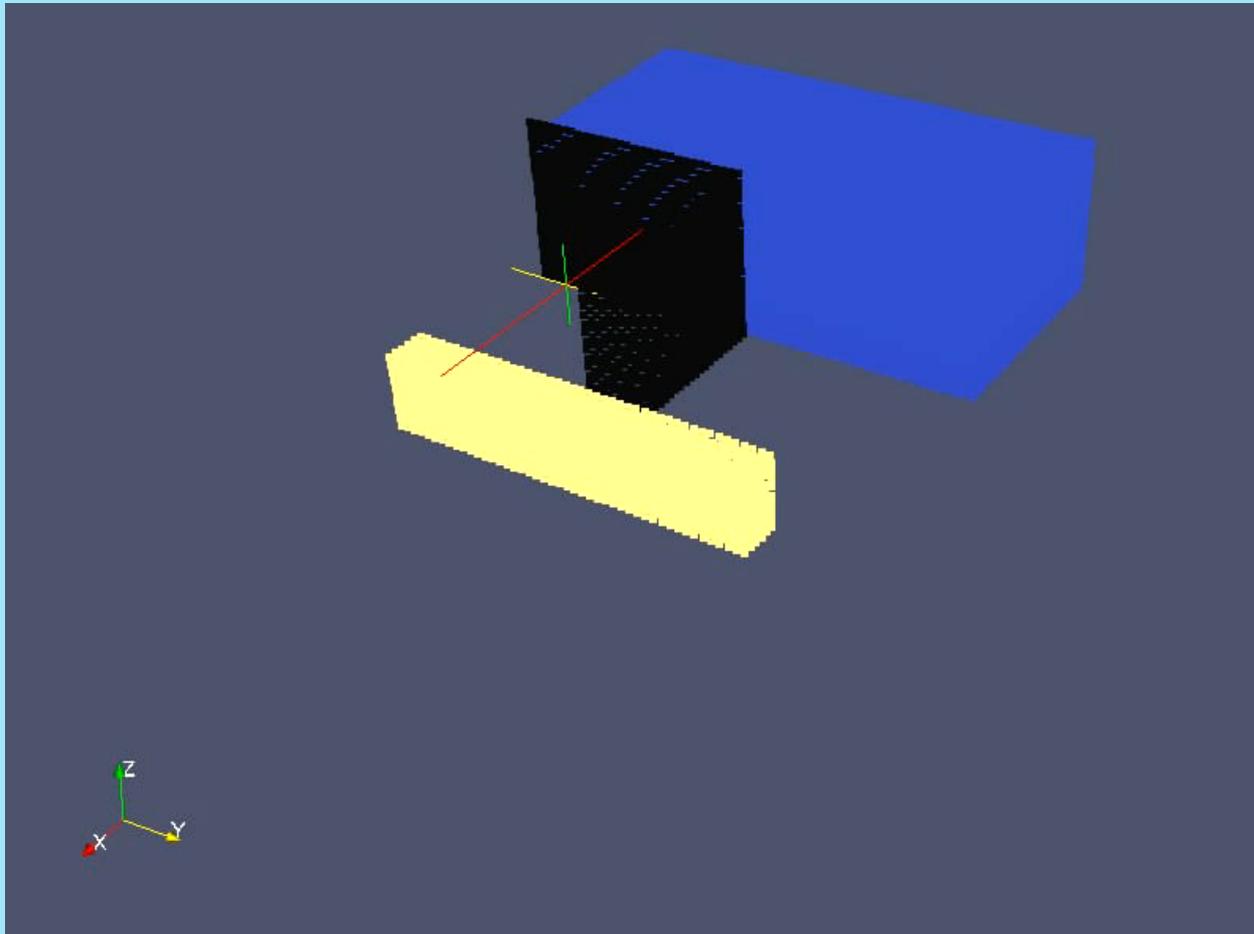
La reologia dipende dalla temperatura  $T$



Lo stesso codice può simulare acqua o lava  
Simulazione della rottura di una diga



Interazione fra fluido e oggetti solidi  
Solido: corpo rigido che soddisfa le equazioni cardinali della dinamica



Modello di formazione di *tsunami*:  
onda provocata dall'improvviso  
sollevamento di una parte del fondale

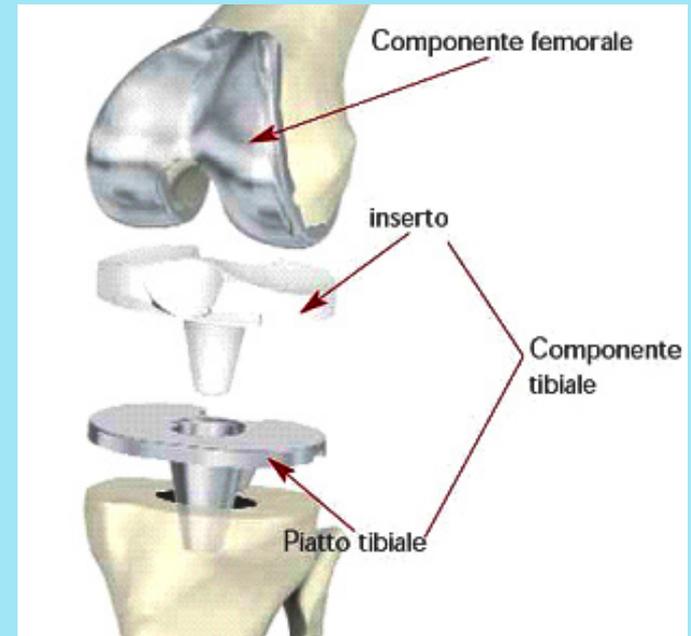


# Il progetto LIMA: Un prototipo di ricerca applicata internazionale ed interdisciplinare

## Partecipanti

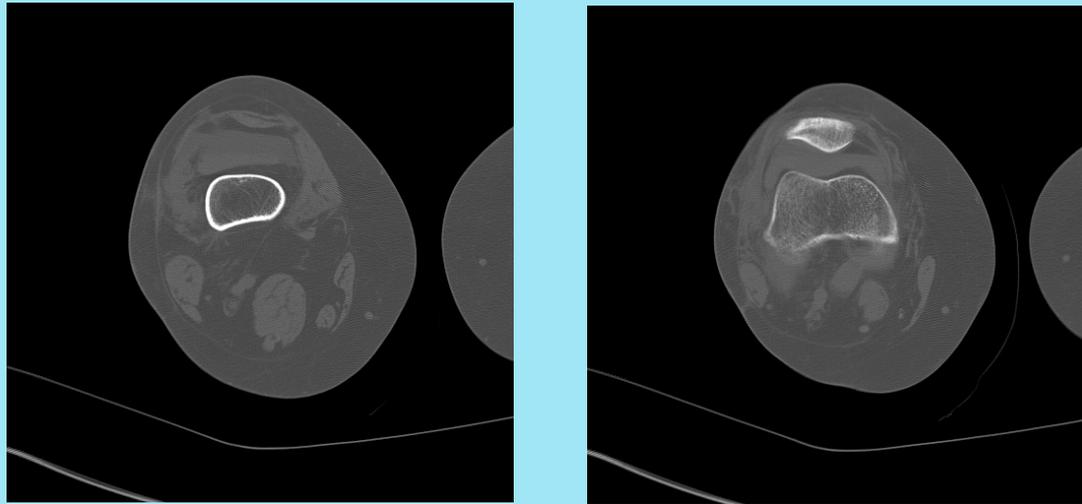
- Università di Catania
  - DMI
  - DIIM
- Consorzio Catania Ricerche
- Ospedale Vittorio Emanuele, Catania
- Limagroup, San Daniele, Italia
- ITWM, Kaiserslautern, Germania

- Obiettivo principale: produrre software prototipo (KneeMech) che assista il chirurgo nell'impiantazione della protesi al ginocchio
- Data la forma della protesi, ed il taglio all'osso, il programma dovrebbe:
  - Calcolare la distribuzione di sforzi e deformazioni nell'osso, sottoposto ad un carico tipico
  - Visualizzare i risultati mediante un grafico a colori bidimensionale di una sezione arbitraria
  - Effettuare analisi di sensitività: produrre l'intervallo di sforzi e deformazioni, noto che sia l'incertezza sui dati



# Modellizzazione matematica dell'osso

- L'osso è modellizzato come un materiale viscoelastico tridimensionale, composto da una regione corticale (rigida) e da una regione spongiosa (soffice)
- Ricostruzione geometrica da immagini TAC, fornite dall'Ospedale Vittorio Emanuele



Tipica immagine TAC del femore  
sinistra: in mezzo, destra: zona vicino al ginocchio

3D segmentazione: la sequenza di informazioni 2D è convertita in dati 3D in termini di "voxel" (l'equivalente 3D dei "pixels")

# Modellizzazione del ginocchio

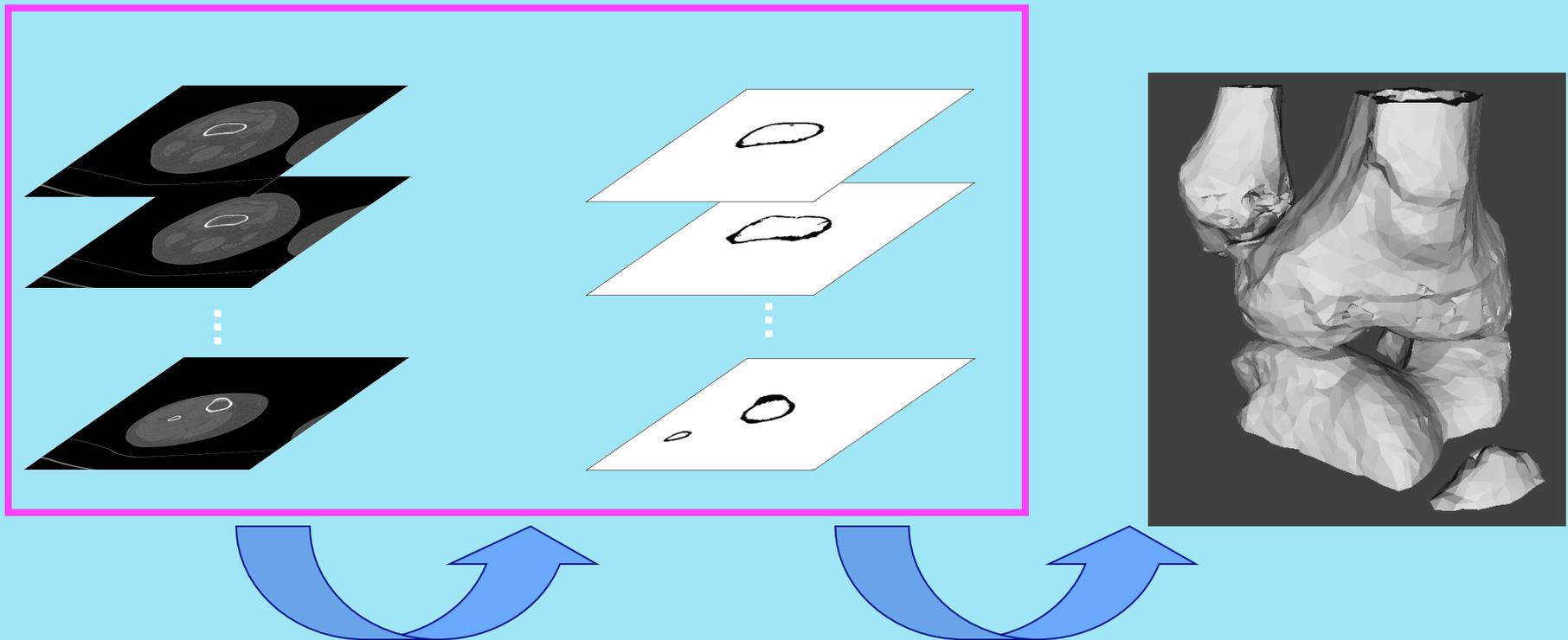
DMI – Image processing group (S.Battiato, G.Impoco)

Estrazione dei modelli 3D dalle immagini TAC

CT Scan of the  
bone

Binarisation

3D Model



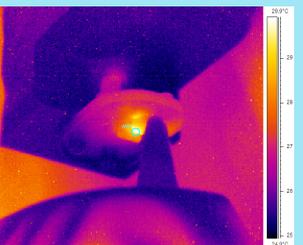
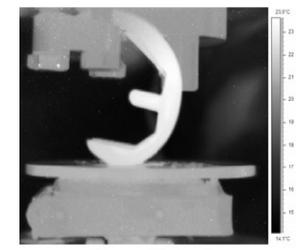
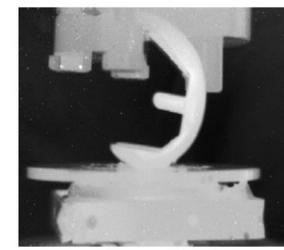
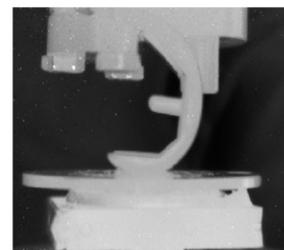
Il modello 3D restituisce anche, mediante interpolazione, i parametri meccanici dell'osso forniti dalle misure ottenute da DIIM in alcuni punti

# Misurazioni meccaniche

DIIM – gruppo dei Proff. Risitano e La Rosa

Le proprietà meccaniche **della protesi** sono state misurate mediante prove di sollecitazione a (micro) fatica usando il metodo Risitano (effetto termico indotto dalla microplasticità)  
Un tale metodo è molto meno invasivo degli standard test a fatica

Setup sperimentale  
e mappa termica  
per la protesi

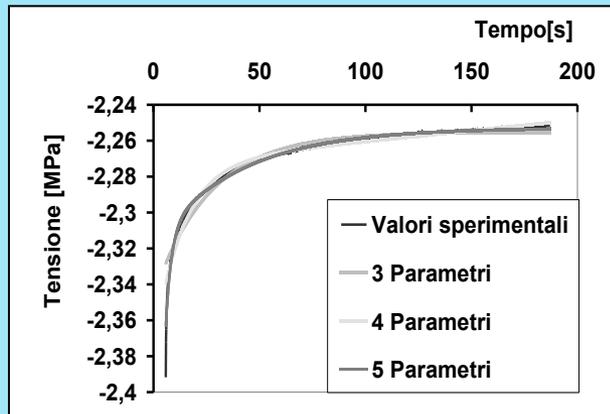
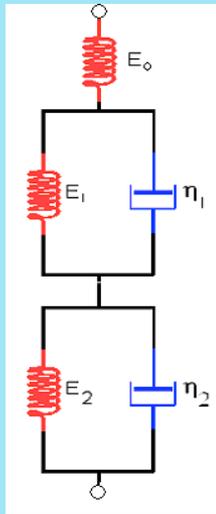


# Proprietà meccaniche dell'osso

Le proprietà meccaniche dell'osso sono state misurate da piccoli campioni cilindrici di osso, nelle regioni corticale e spongiosa. Allo scopo è stata utilizzata una macchina per microcompressione appositamente costruita.



Un modello matematico viscoelastico a cinque parametri è stato utilizzato.



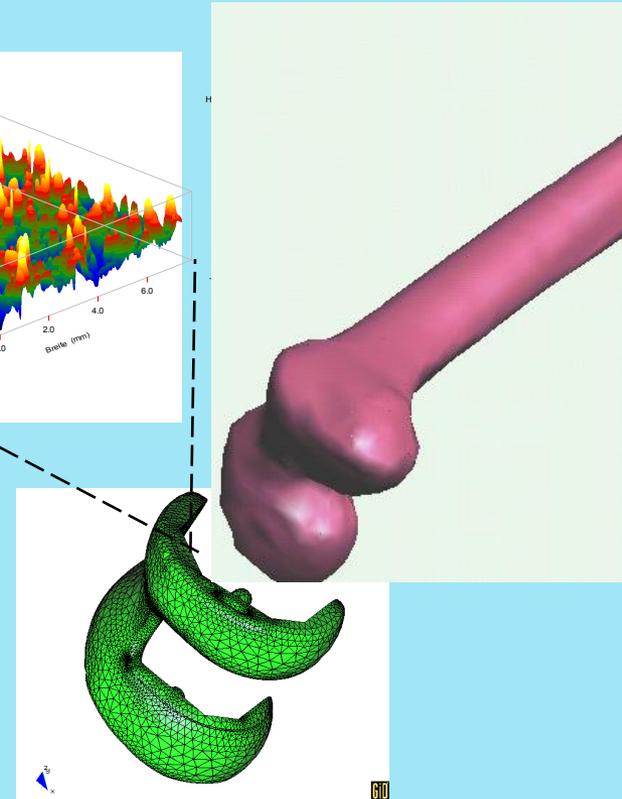
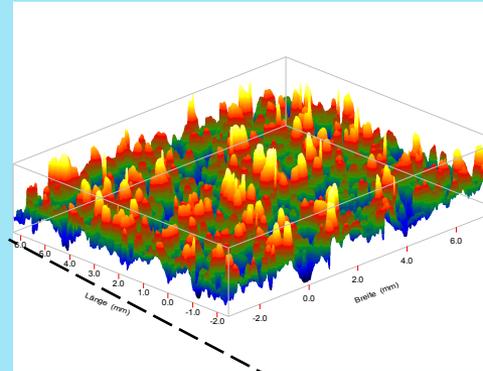
I parametri che identificano le proprietà viscoelastiche del materiale sono state ottenute mediante *least square best-fit* della curva di risposta temporale durante prove di rilassamento.

Una TAC dell'osso viene quindi effettuata dopo che il campione è stato estratto, per ottenere una mappatura geometrica delle proprietà meccaniche dell'osso.

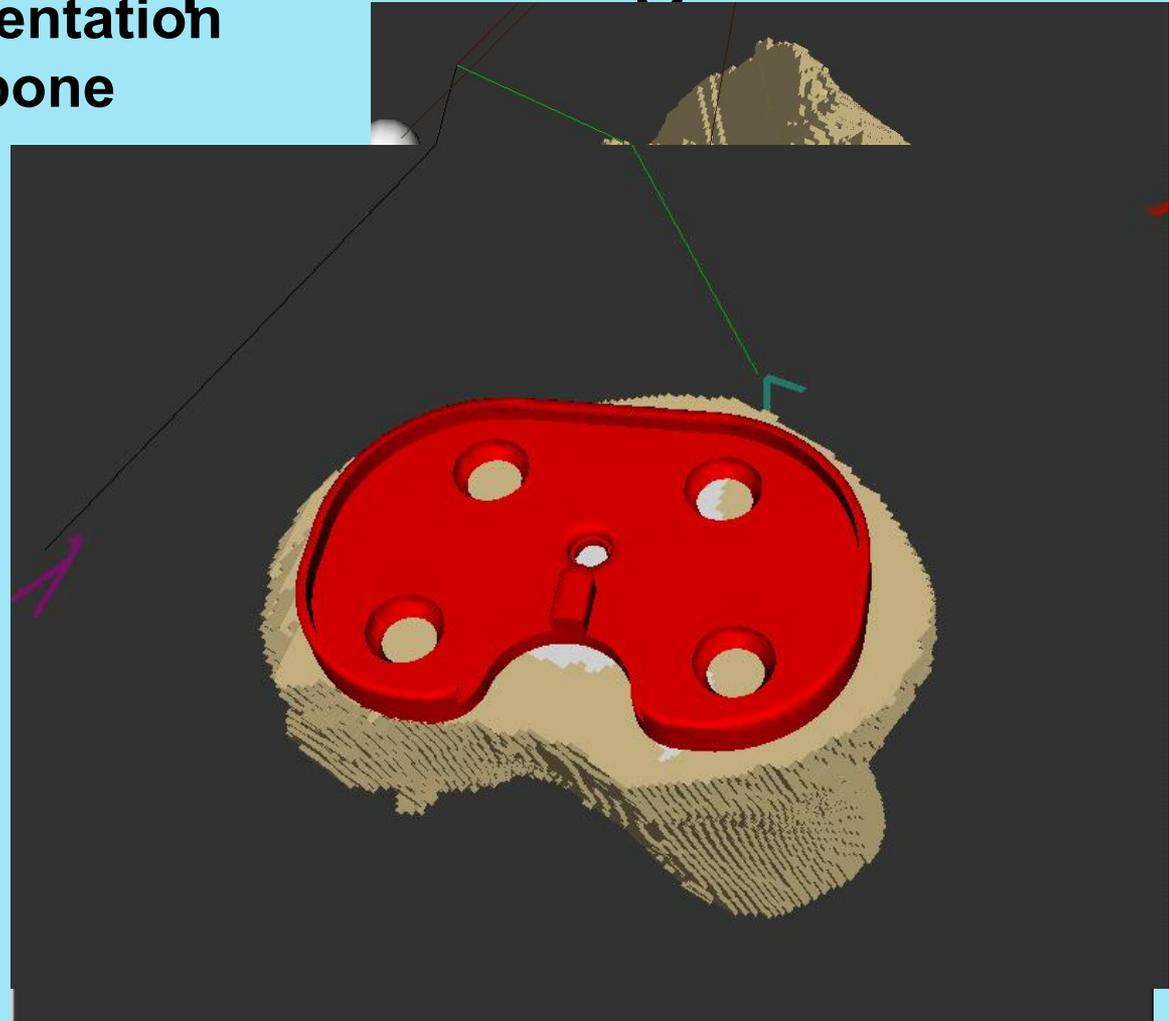
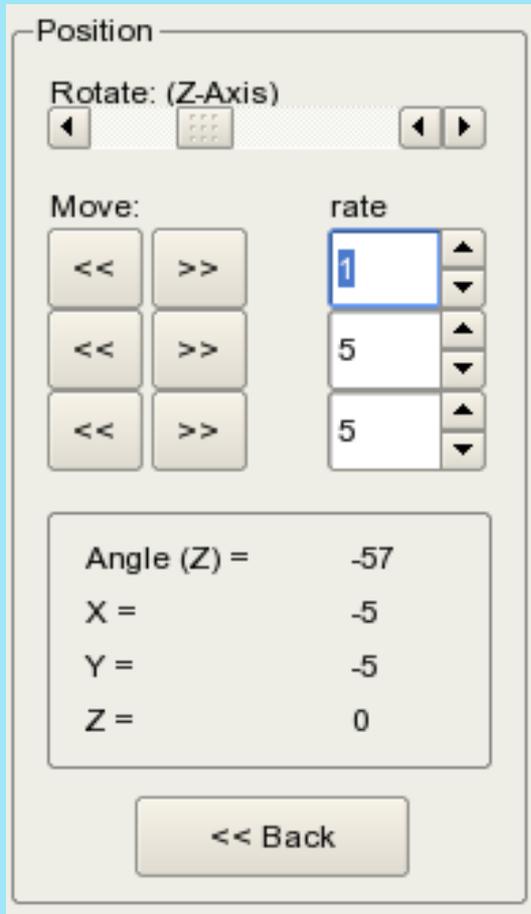
# Finite element calculation and 3D visualization

ITWM – Heiko Andrä, Julia Orlik and Aivars Zemitis

- FE multi-scale contact analysis based software which takes into account
  - Contact between bone and tibial plate
  - CT data
  - Mechanical properties of the bone
  - Static and dynamic load conditions



# Representation of the bone basis positioning bone



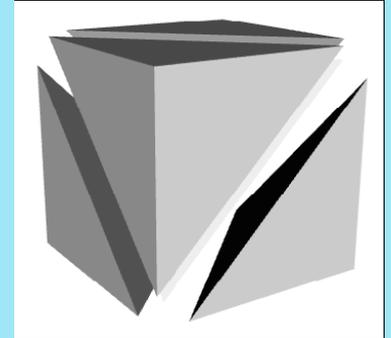
Rotation, translation  
and final positioning

# Mathematical model and numerical simulation

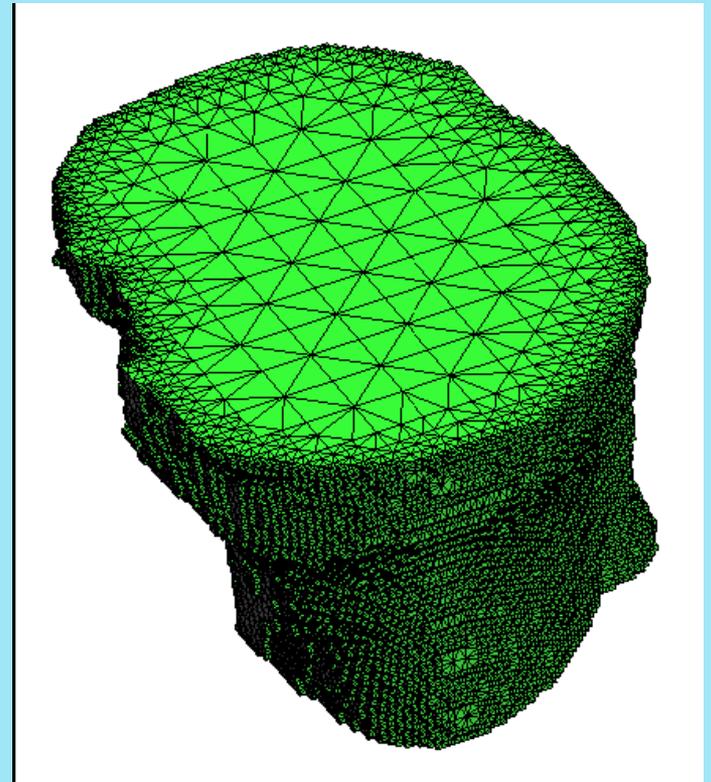
- 3D partial differential equations for stress and strain in the bone and in the prosthesis
- The equations are discretized on a tetrahedral grid, obtaining a large, sparse algebraic linear system for the displacement array
- The system is solved by a suitable iterative solver

# Grid generation

The grid is first generated by subdividing each voxel



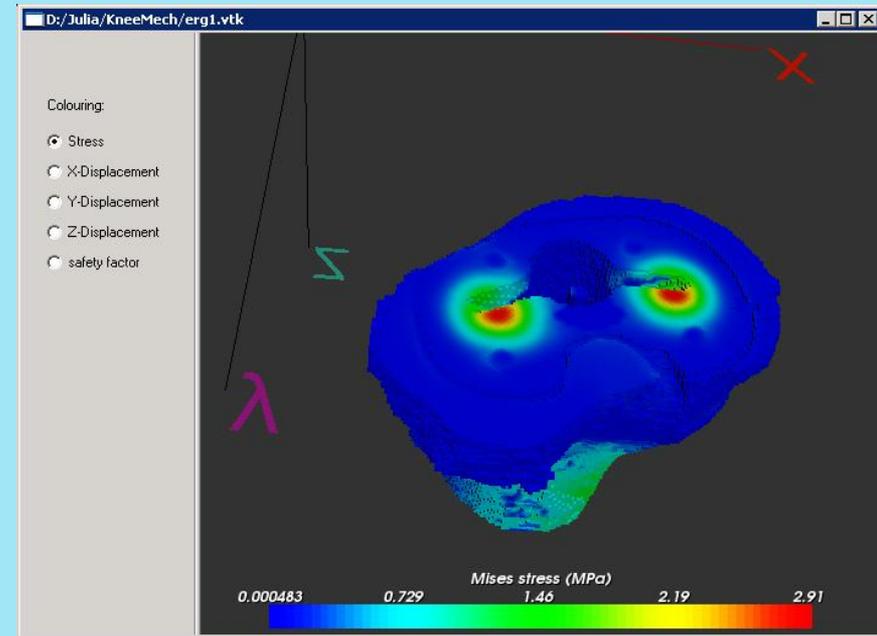
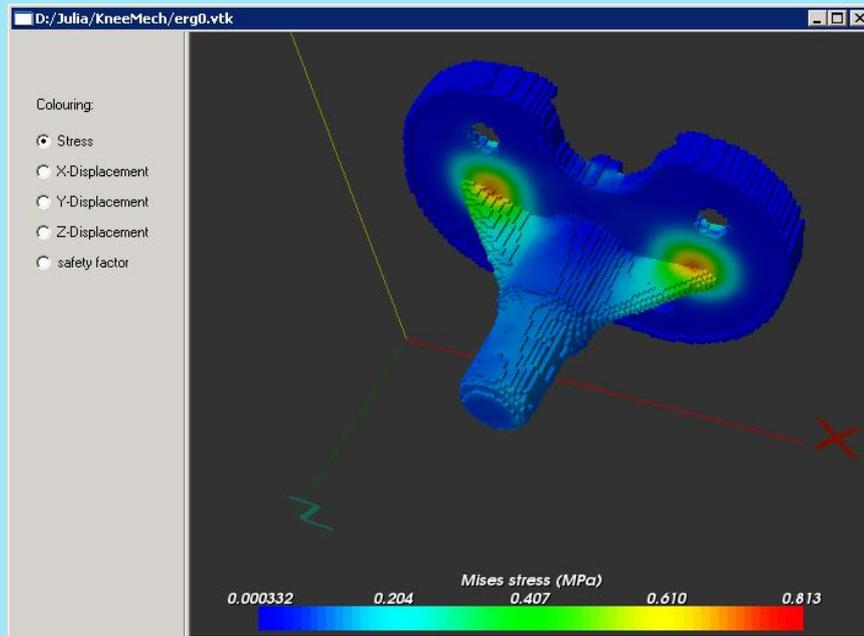
Then it is hierarchical coarsened in the two regions of the bone (cortical and spongiosa) in order to reduce the number of unknowns (and therefore the computation time)



Example of grid coarsening

# Visualization of the results

- From the displacement, all desired quantities can be computed by postprocessing



Von Mises stress (typical parameter in breaking test) in the prosthesis (left) and bone (right)



Bone Implant System

--- Contact conditions  
--- Load conditions  
--- Simulation  
--- Sensivity analysis

Sensivity analysis

Uncertainties(1%-20%)

corticalis 4

spongiosa 7

Start analysis

Load Result

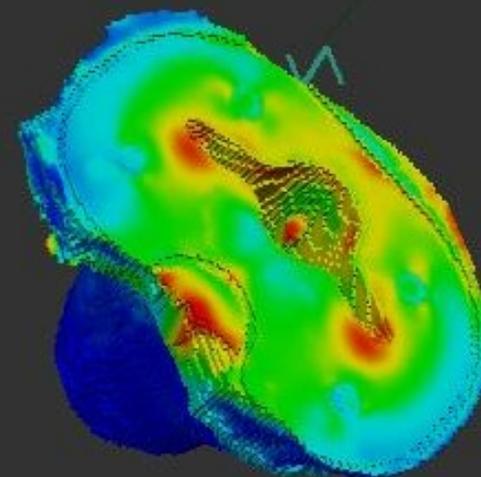
Load External Result

D:\aivars\KneeMech\trunk\data\KneeMech\affine\_u.vtk

Colouring:

- Stress
- min\_stress
- max\_stress
- stress\_rad
- stress\_rel
- X\_displacement
- Y\_displacement
- Z\_displacement
- Min\_X\_displacement
- Min\_Y\_displacement
- Min\_Z\_displacement
- Max\_X\_displacement
- Max\_Y\_displacement
- Max\_Z\_displacement

Save results as ...



relative stress uncertainty

0.00111

0.246

0.491

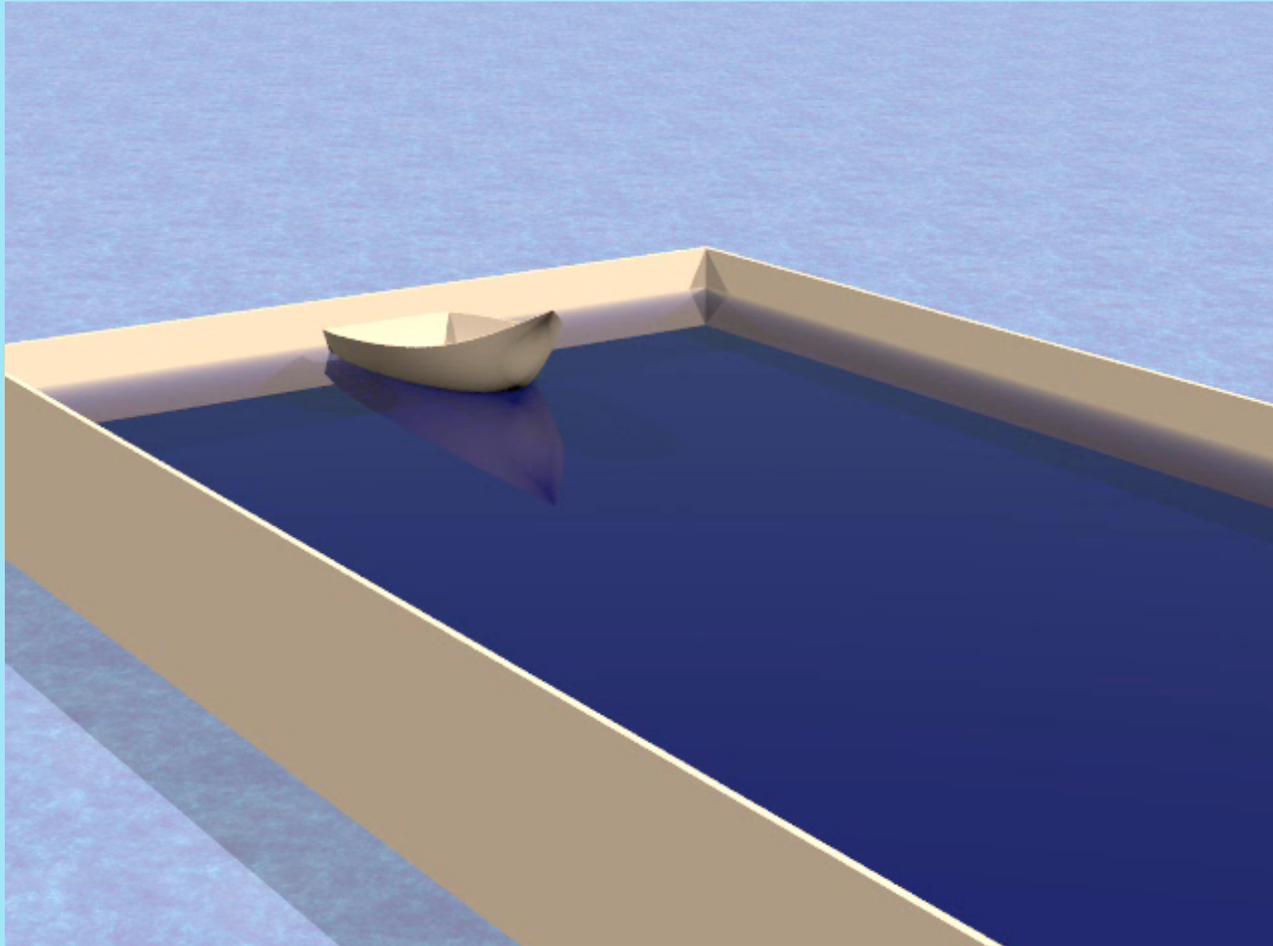
0.736

0.981

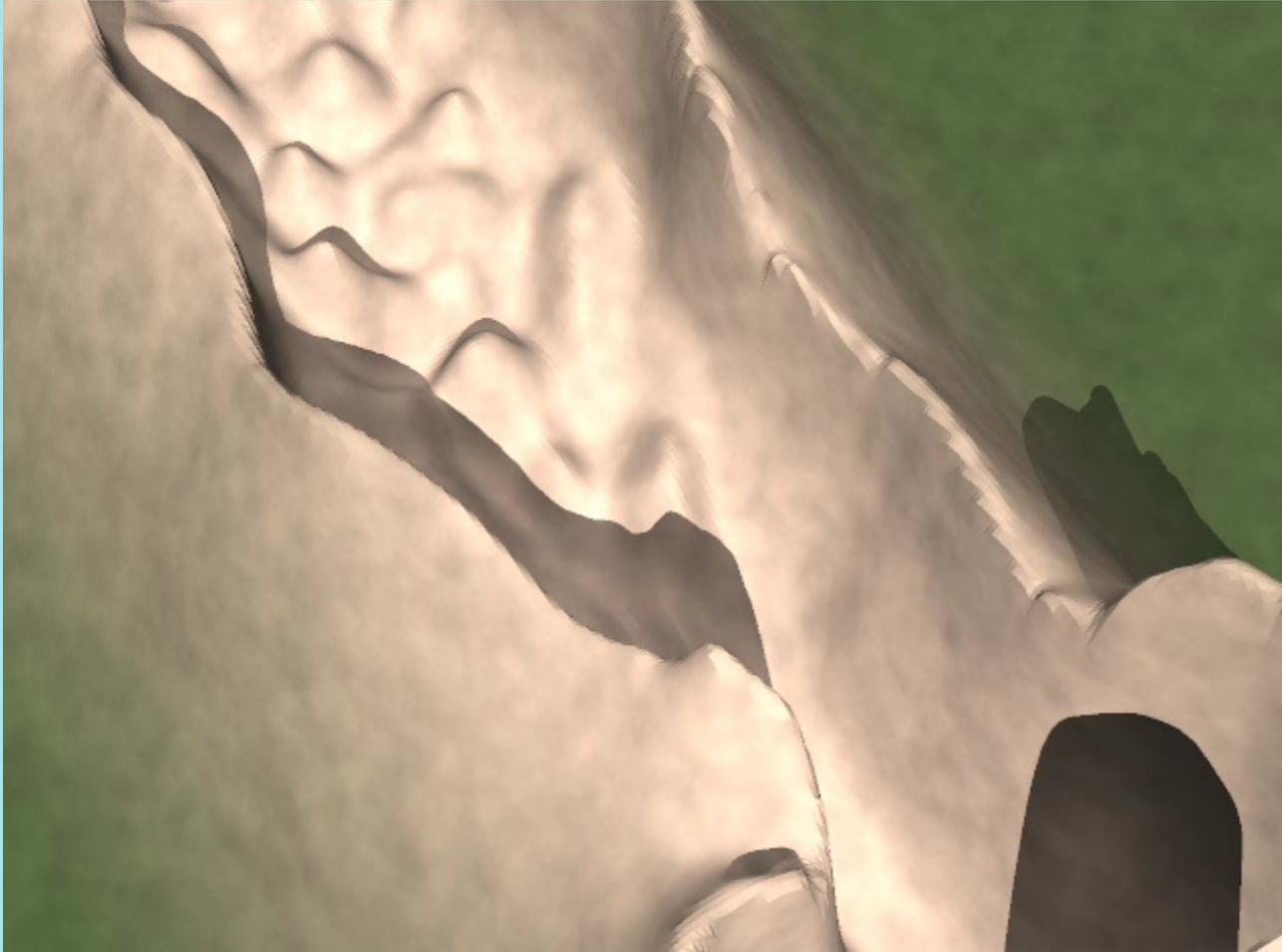
# Animazioni...realistiche

- Nell'industria cinematografica di animazione si cerca di ottenere effetti di grande realismo e spettacolarità, senza richiedere una precisione nel comportamento reale di un sistema fisico (moto di gas, acqua, o animali)
- Simulazioni "verosimili" sono ottenute risolvendo modelli matematici semplificati, ma molto simili a quelli che descrivono fenomeni reali.
- Il prof. Ron Fedkiw, della Stanford University, è un grande esperto del settore.

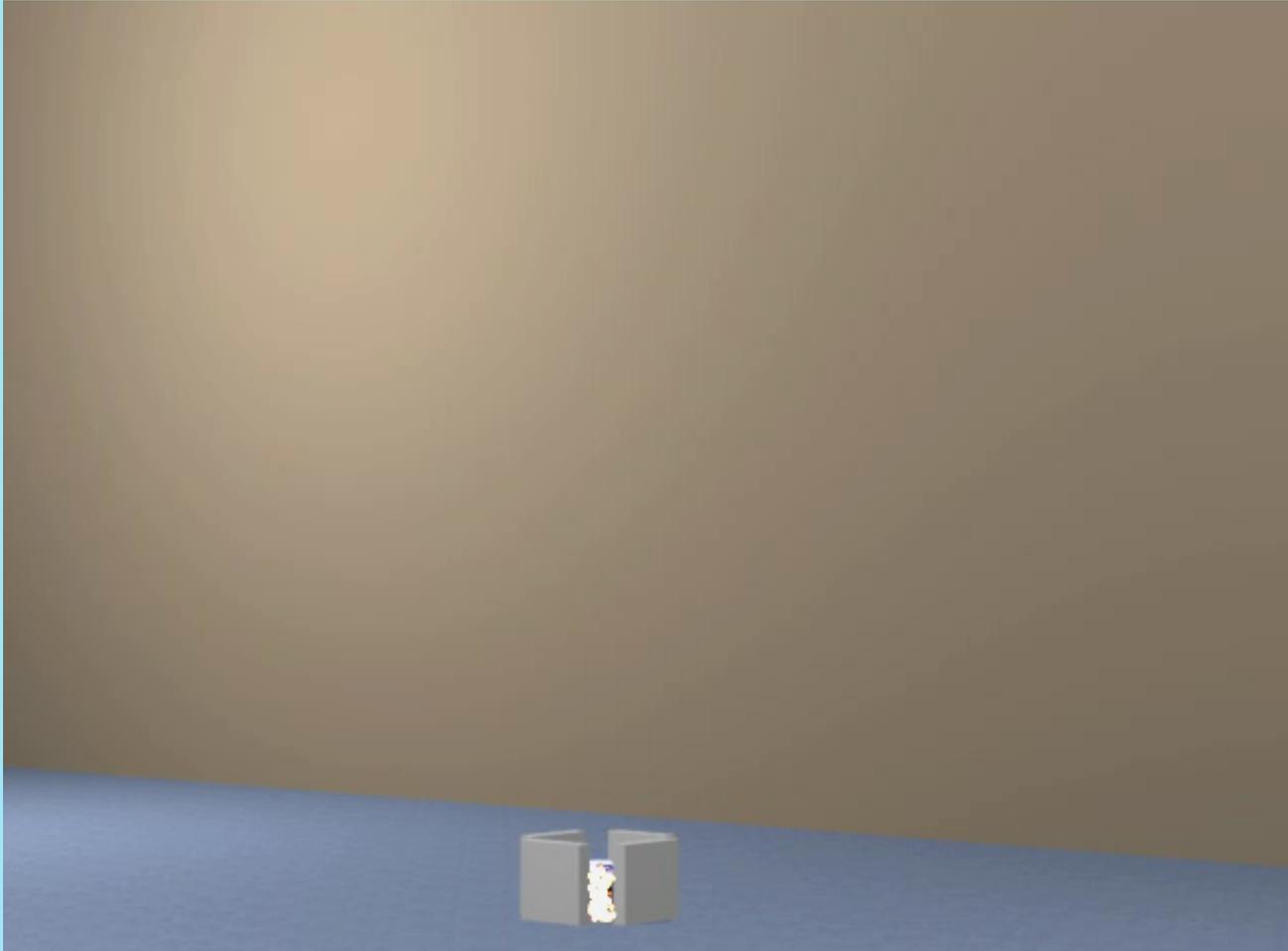
## Simulazione di una imbarcazione sull'acqua



## Simulazione di un torrente “artificiale”



# Esplosione e conseguente formazione della colonna di fumo



# Conclusioni

- La matematica industriale è una realtà in Europa ed in Italia
- Può fornire:
  - sbocchi lavorativi per i giovani laureati con solida formazione in matematica applicata
  - opportunità per aziende che investono nella innovazione
  - fare da supporto in progetti di ricerca interdisciplinari
  - fornire nuovi ed interessanti sfide di carattere matematico

Grazie per l'attenzione!

# Associazioni di Matematica Industriale

**Italiana: SIMAI (Società di Matematica Applicata e Industriale)**

Matematici che lavorano nel settore applicativo come analisti numerici, fisici matematici, analisti. Simili società esistono in Spagna (SEMA) e Francia (SMAI)

**ECMI European Consortium of Mathematics in Industry**

Associazione europea che si occupa di

- Modellistica matematica e numerica indirizzata a problemi industriali
- Formazione di giovani attraverso conferenze, stages e corsi

**ECCOMAS (European Congress on Computational Methods In Applied Sciences and Engineering)**

Organizza grossi convegni quadriennali

**ICIAM International Council for Industrial and Applied Mathematics**

**SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics, USA)**

Riviste scientifiche, libri, corsi di formazione, conferenze generali e tematiche