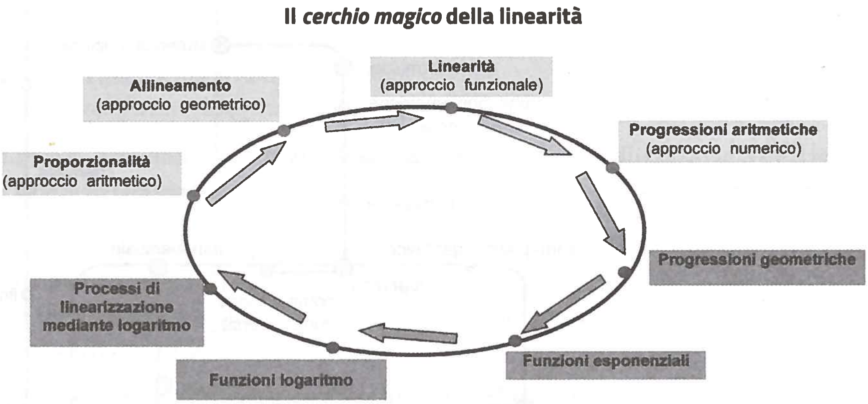
Introduzione

Questo volume completa la prima parte del percorso MATH Maps - *Il cerchio magico della linearità*, apparso sul numero 41 di Alice&Bob.



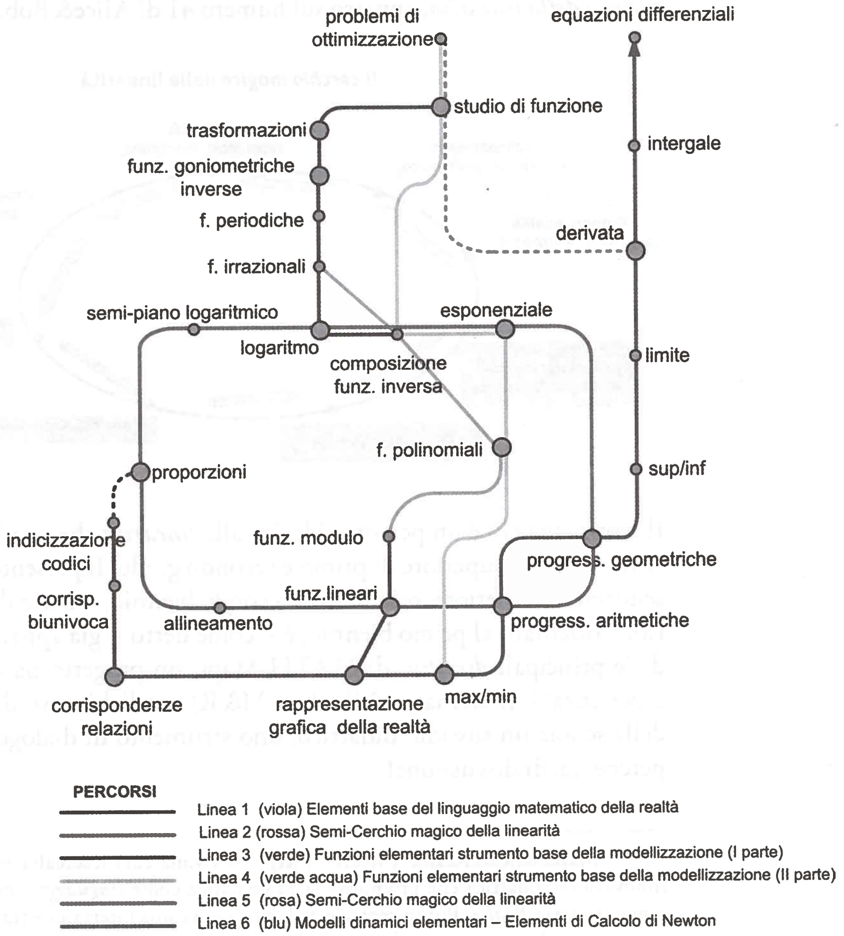
Il *cerchio magico* è un percorso ideale sulla *linearità* che si sviluppa in continuità fra la scuola superiore di primo e secondo grado. Il presente volume illustra il semicerchio inferiore, orientato al secondo biennio, mentre il semicerchio superiore, orientato al primo biennio, è – come detto – già apparso sul n. 41. È una delle principali *direttive* di MATH Maps, un progetto nato dalla ventennale esperienza di Matematica&Realtà[1] (M&R) con l'obiettivo di fornire al mondo della scuola un sussidio didattico, uno strumento di dialogo e di confronto e, perché no, di discussione!

1. Matematica&Realtà (M&R) [http://www.matematicaerealta.eu] è un progetto di innovazione didattica che promuove la Matematica come *linguaggio chiave per interpretare e comprendere la Realtà*. Punto centrale della proposta è una interazione tra mondo reale e mondo matematico, basata su una dinamica di insegnamento-apprendimento fortemente orientata all'acquisizione di competenze e non limitata alla sola trasmissione di conoscenze e abilità.

È ancora una volta un'opera "corale" dei collaboratori M&R, in continua evoluzione, strutturata in percorsi che evolvono in una elica ascendente (http://www.matematicaerealta.eu).

La proposta comporta *un radicale rinnovamento* della didattica basato sulla *educazione alla modellizzazione* con strumenti elementari. Non consiste semplicemente nell'arricchire il percorso didattico con un ventaglio di applicazioni tratte dalla vita quotidiana, ma è piuttosto un invito ad impostare il processo educativo ancorandolo alla modellizzazione della realtà, secondo *linee guida* collegate da temi trasversali che costituiscono un saldo sostegno per le volute dell'elica.

Le *linee guida* sono le nostre *autostrade*, fungono da filo conduttore per l'intero percorso educativo, generano nei discenti una immagine unitaria e coadiuvano gli insegnanti nel progettare percorsi didattici non frammentari, per tutte le fasce di età (dalla scuola dell'obbligo all'Università), calibrati secondo le varie esigenze curriculari e il livello dei discenti.



(Per una visione a colori, consultare il sito M&R)

Principali linee guida del processo educativo:

Linea 1 - Elementi base del linguaggio matematico della realtà
Percorso in continuità fra scuola primaria e secondaria di I grado sulla via delle competenze
Dal linguaggio "naturale" al linguaggio matematico e viceversa.
Corrispondenze e relazioni. Riferimenti, indicizzazioni e codici del quotidiano. Strutture gerarchiche.
Rappresentazione grafica della realtà (potenzialità e aspetti critici).

Linea 2 - Semicerchio magico della linearità (I parte)
Percorso in continuità fra scuola secondaria di I e II grado sulla via delle competenze
Introduzione al linguaggio matematico della realtà.
Proporzionalità nella vita reale (uso consapevole di proporzioni e percentuali).
Proporzionalità e linearità (allineamento con l'origine). Proporzionalità e allineamento. Dalle proporzioni alle equazioni.

Linea 3 - Funzioni elementari, strumento base della modellizzazione (I parte)
Percorso I biennio scuola secondaria di II grado sulla via delle competenze
Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari.
Lettura ed interpretazione di dati sperimentali. La media a scuola e nel quotidiano.
Funzioni lineari, lineari a tratti, funzione modulo.
Equazioni, sistemi, disequazioni lineari nei problemi della vita reale.

Linea 4 - Funzioni elementari, strumento base della modellizzazione (II parte)
Percorso in continuità fra I e II biennio scuola secondaria di II grado sulla via delle competenze
Uso consapevole dei modelli lineari. Alleniamoci a *manipolare* modelli lineari a tratti. Dai modelli lineari ai modelli non lineari. Uso consapevole di alcuni modelli non lineari elementari. Funzioni quadratiche e iperboliche, equazioni e disequazioni polinomiali e irrazionali.

Linea 5 - Semicerchio magico della linearità (II parte)
Percorso in continuità fra II biennio e ultimo anno scuola *secondaria di II grado sulla via delle competenze*
Fenomeni di crescita/decadimento. Progressioni aritmetiche e geometriche. Fenomeni e funzioni esponenziali. Uso consapevole dei modelli esponenziali. Interpolazione esponenziale in problemi di vita reale. Processo di linearizzazione mediante logaritmo. Piano semi-logaritmico e logaritmico, equazioni e disequazioni trascendenti.

Linea 6 - Modelli dinamici elementari
Percorso in continuità fra scuola e Università sulla via delle competenze
Modelli discreti di crescita/decadimento. Modelli di Malthus, Verhulst, Newton. Studio del comportamento asintotico. Dall'estremo superiore/inferiore all'algoritmo di limite. Dai modelli discreti ai modelli continui. Processo di integrazione. Equazioni differenziali elementari.

Le indicazioni ministeriali sui nuovi curricula della scuola superiore si riferiscono espressamente alla *modellizzazione matematica e alla specificità che essa* *istituisce fra Matematica e realtà* per la formazione di competenze; inoltre pongono come obiettivo fondamentale *l'acquisizione di strumenti matematici necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate.*

La scuola si trova quindi di fronte ad una sfida impegnativa, irta di difficoltà che tuttavia offre una opportunità unica di crescita culturale.

È in questo contesto di rinnovamento che si inquadra il presente volume.

La stazione di partenza contempla le progressioni aritmetiche e geometriche, riguardate come modelli elementari di crescita/decadimento. Il percorso inizia, come di consueto, da situazioni e fenomeni della vita reale con l'intento di analizzare e possibilmente rappresentare situazioni o fenomeni *in evoluzione.*

Le *progressioni aritmetiche* sono l'anello congiungente il primo e il secondo semicerchio della linearità. Ammettono come curva sostegno una *funzione lineare* e sono quindi inserite a pieno titolo nell'ambito dei *modelli lineari*. La presenza di un contatore o stadio che scandisce l'evoluzione del processo conferisce dinamicità al modello.

Un processo iterativo *feed-back*:

$$\begin{cases} x_0 & \text{start} \\ x_{n+1} = T(x_n) & n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

è la struttura base di questi modelli dinamici elementari. Nel caso delle progressioni aritmetiche la trasformazione T si riduce ad una traslazione $[T(x) = x + d]$, mentre è una omotetia $[T(x) = k \cdot x]$ nel caso geometrico.

I due processi, aritmetico e geometrico, sono *in dualità* e si passa dall'uno all'altro sostituendo l'operazione di addizione con quella di moltiplicazione. Lo studio delle curve sostegno dei due processi conduce dapprima alle equazioni di I grado e successivamente a quelle esponenziali e logaritmiche.

Nel Capitolo 1 proponiamo una *rilettura* del metodo risolutivo di una equazione/disequazione di I grado, l'usuale *approccio algebrico* (basato sui principi di equivalenza nell'algebra polinomiale) lascia il passo ad un *approccio funzionale*, fondato sull'algebra delle funzioni lineari.

Assegnata l'equazione:

$$f(x) = y_0 \tag{1}$$

con $y = f(x)$ funzione lineare e y_0 termine noto, consideriamo la sua funzione inversa $x = f^{-1}(y)$.

Per risolvere l'equazione (1) è sufficiente ricorrere alla tecnica della *funzione inversa* ovvero applicare la funzione f^{-1} ad entrambi i membri, ottenendo:

$$f(x) = y_0 \;\Rightarrow\; f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y_0) \;\Rightarrow\; x = f^{-1}(y_0).$$

Il Capitolo 2 è dedicato ai processi geometrici, inquadrati come processi di crescita/decadimento. Particolare attenzione è rivolta al fattore di crescita/decadimento, parametro caratteristico del processo.

Nel caso di modelli di evoluzione, questo parametro è spesso un numero decimale con numerosi zeri antecedenti la prima cifra significativa, cosa che rende il suo utilizzo piuttosto difficoltoso. Per ovviare a questo inconveniente, si introduce un altro parametro caratteristico: il tempo di raddoppio o dimezzamento (assunto come unità di misura del tempo).

Alle principali proprietà della funzione esponenziale (curva sostegno di un processo geometrico) $g(x) = A \cdot a^x$ è dedicato l'intero Capitolo 3. Ne citiamo qui due che hanno trovato un'ampia gamma di applicazioni:

i) assegnati due punti distinti nel semipiano positivo dell'asse delle ordinate, esiste una sola curva esponenziale passante per i punti dati;
ii) ogni curva esponenziale individua una corrispondenza biunivoca fra *Dom* $g = R$ e *Cod* $g = R^+$ che conserva le operazioni di addizione in R e moltiplicazione in R^+.

Precisamente g trasforma:

- l'elemento neutro dell'addizione (lo zero) nell'elemento neutro della moltiplicazione (l'unità), ossia:

$$g(0) = 1$$

- l'elemento inverso dell'addizione (l'opposto) nell'elemento inverso della moltiplicazione (il reciproco), ovvero:

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}$$

- la potenza di un elemento rispetto all'addizione $[\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ volte}} = n \cdot x]$ nella potenza rispetto alla moltiplicazione $[\underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{n \text{ volte}} = \left(a^x\right)^n]$, precisamente:

$$g(n \cdot x) = [g(x)]^n.$$

In forza della ii), la funzione esponenziale possiede funzione *inversa*, denominata funzione logaritmo, così le proprietà di quest'ultima si deducono come *duali* delle proprietà dell'esponenziale.

In questo contesto abbiamo provato che la funzione esponenziale $g(x) = A \cdot a^x$ e la funzione logaritmo $h(x) = B \log_a x$ possono essere rappresentate attraverso una qualunque prefissata base b con $0 < b \neq 1$. Questo risultato giustifica la presenza delle sole due basi, *decimale* e *neperiana*, nelle calcolatrici scientifiche.

Il Capitolo 4 è dedicato alla proprietà di *linearizzazione* della funzione logaritmo che consente di ricondurre modelli esponenziali a modelli lineari, chiudendo così il cerchio magico della linearità.

In particolare, una curva esponenziale, in un riferimento cartesiano Oxy con scale lineari su entrambi gli assi, si rappresenta con una retta in un piano semilogaritmico Oxy' con $y' = \log y$. In altre parole, si lascia inalterata la scala lineare sull'asse delle ascisse e si introduce una scala logaritmica sull'asse delle ordinate.

Una rappresentazione analoga sussiste anche per modelli polinomiali monomi (del tipo $f(x) = A \cdot x^{\alpha}$) purché si operi in un piano logaritmico[2] (scala logaritmica su entrambi gli assi).

Riprendendo la tecnica della funzione inversa utilizzata per le equazioni lineari, affrontiamo il metodo risolutivo delle equazioni esponenziali e delle equazioni logaritmiche.

Innanzi tutto si costruisce l'algebra A delle funzioni invertibili (che contiene, tra le altre, le funzioni lineari, la funzione esponenziale e la funzione logaritmo).

Successivamente, assegnata una equazione esponenziale:

$$A \cdot a^{x} = y_0 \tag{2}$$

ricorrendo alla tecnica della funzione inversa ovvero passando al logaritmo di ambo i membri, la (2) si riduce all'equazione lineare:

$$\log_a A + x = \log_a y_0.$$

Dualmente, assegnata una equazione logaritmica:

$$B \log_a x = y_0 \tag{2'}$$

ricorrendo alla funzione inversa del logaritmo ovvero passando all'esponenziale di ambo i membri della (2'), si deduce:

$$a^{\log_a x} = x = a^{y_0/B}.$$

Infine, nel Capitolo 5 proponiamo alcune situazioni problematiche tratte dalla realtà che offrono l'opportunità di mettere in gioco, oltre a conoscenze ed abilità, anche competenze di vario livello sugli argomenti trattati nel pre-

2. Da queste rappresentazioni lineari si deduce che, assegnati due punti distinti nel semipiano positivo dell'asse delle ordinate, esiste una sola curva polinomiale monomia passante per i punti dati. Fra le applicazioni citiamo l'esistenza di una sola trasformazione termodinamica politropica (adiabatica, isocora, isobara o isoterma), rappresentata da una curva polinomia monomia, che permette di passare da una situazione di equilibrio iniziale (p_1, V_1) ad una situazione di equilibrio finale (p_2, V_2) nel piano pressione-volume.

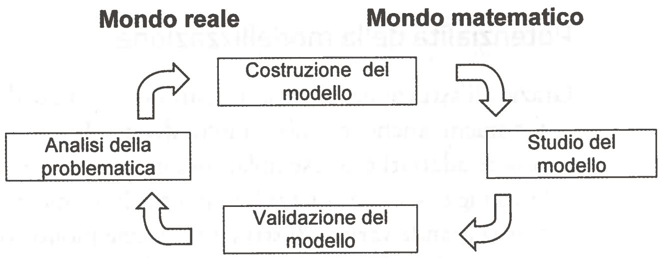
sente volume. I quesiti sono tratti dalla Gara di Modellizzazione Matematica - Matematica&Realtà, competizione riconosciuta dal MIUR per la valorizzazione delle eccellenze.

Il modello matematico

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.

Il modello matematico di un "fenomeno" del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua "simulazione", utilizzando un linguaggio simbolico universale.

Il processo di modellizzazione procede per fasi successive che creano una interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.



Fasi del processo di modellizzazione

Fase 1 *Analisi della problematica.* Si prende in esame la problematica in oggetto e si cerca di stabilire quali siano i dati noti e quali quelli incogniti. Si individuano eventuali legami tra le variabili in gioco e/o eventuali vincoli imposti dalla situazione.

Fase 2 *Costruzione del modello.* Dopo aver eventualmente semplificato il problema da affrontare (es. eliminando alcune variabili o scomponendo il problema in sotto-problemi), si traduce la questione in relazioni matematiche tra i dati e le incognite.

Le prime due fasi costituiscono il passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono "tradotti in linguaggio" matematico (modello).

Fase 3 *Studio del modello.* La fase si svolge tutta all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello. Si discute e (se possibile) si risolve il modello matematico. Importante distinguere i tre aspetti: esistenza, unicità, calcolo delle soluzioni (esatto o approssimato).

La costruzione e lo studio del modello promuovono un'analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.

Fase 4

Validazione del modello. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per confrontare la soluzione del modello con il problema iniziale. Questo raffronto è fondamentale in quanto consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Se la verifica delle soluzioni trovate "a tavolino" rivela delle inadeguatezze *con la realtà*, si può procedere a un secondo processo di modellizzazione, che tenga conto delle questioni emerse nel primo tentativo. Si individua così un modello più adatto a gestire il problema in esame.

Successivi perfezionamenti o varianti conducono ad un prototipo virtuale via via più efficiente. Questa progressiva evoluzione richiede in genere strumenti e tecniche matematiche sempre più complessi e articolati.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po' come si fa con le costruzioni Lego[3], in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. È in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

Modellizzazione e strategie didattiche

Visti gli spazi sempre più esigui riservati all'insegnamento della Matematica, non è proponibile una educazione alla modellizzazione *come scoperta*, ma la si può guidare come *bisogno intellettuale*. Ricorrendo alle collaudate tecniche di marketing, gli insegnanti dovrebbero far nascere negli studenti, di volta in volta, "nuovi bisogni di curiosità intellettuale" per poi *guidarli* sulla *via della loro soddisfazione*.

La stessa dinamica della modellizzazione dovrebbe guidare il percorso di insegnamento-apprendimento.

Fasi 1-2

Partendo da situazioni e problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione matematica (modello), si possono introdurre in modo naturale

3. Le costruzioni Lego sono state introdotte recentemente come strumento didattico nelle scuole primarie.

Fasi 3

concetti e strumenti matematici che vengono acquisiti e testati nella fase dello studio del modello matematico.

Fasi 4

La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e far emergere nuove esigenze.

A sua volta, l'acquisizione di strumenti matematici sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.

Ping-pong

In questo modo, come in un gioco a ping-pong tra mondo reale e mondo matematico, il percorso si evolve in un'elica ascendente.

Alcune raccomandazioni

L'esperienza maturata negli ultimi 20 anni, prima con i percorsi Orientamatica[4] e successivamente nei laboratori Matematica&Realtà, nonché nei nostri corsi universitari, ci induce a formulare alcuni suggerimenti per chi intende intraprendere il percorso di educazione alla modellizzazione.

Intuizione e formalizzazione

Introdurre i concetti privilegiando un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in un secondo tempo alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria.

Incoraggiare gli studenti a proporre loro stessi definizioni e a costruire dimostrazioni.

4 aspetti

Strumenti e tecniche dovrebbero essere presentati avvalendosi di quattro aspetti: la descrizione verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio matematico).

Le rappresentazioni multiple incoraggiano gli studenti a riflettere sul significato di quanto viene loro proposto.

Problemi veri

Si raccomanda di proporre **solo problemi veri**, non verosimili!

Le problematiche saranno tratte dalle mille proposte offerte dalla vita quotidiana (reperibili attraverso giornali, TV, internet, depliants pubblicitari, ...) presentate nel loro contesto originale, né adattate, né semplificate, al fine di consentire una corretta educazione alla modellizzazione.

Esercizi intelligenti

Ridurre al minimo gli esercizi di routine, privilegiando le questioni che richiedono il coinvolgimento dello studente ed invitano alla riflessione.

---

4. Corsi di formazione, orientamento e auto-valutazione rivolti a studenti del triennio degli istituti superiori con lo scopo di integrare la formazione scolastica proiettandola verso gli studi post-diploma e contemporaneamente favorire l'inserimento nel mondo del lavoro o promuovere un orientamento consapevole alla scelta universitaria.

Atteggiamento studenti

Le parole chiave del percorso di apprendimento sono: *esplorare*, *comprendere*, *comunicare*. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a scrivere e leggere argomentazioni matematiche, discutere e riflettere sui concetti, confrontare strumenti e tecniche.

In ogni fase del percorso di apprendimento dovrebbero essere in grado di riflette su *cosa stanno facendo, perché lo fanno* e *cosa si aspettano che accada*.

Nuove tecnologie

Le nuove tecnologie offrono un importante strumento educativo non solo perché, sollevando dagli aspetti più tecnicistici, permettono di dedicare più tempo alla comprensione dei concetti, ma anche perché pongono i ragazzi di fronte a difficoltà ed imprevisti che, se gestiti in modo consapevole e riflessivo, costituiscono un'occasione preziosa di crescita culturale.

La nostra esperienza ha evidenziato che ancorare l'insegnamento della Matematica alla vita reale, oltre a stimolare l'interesse, favorisce la partecipazione attiva e responsabile, sviluppa un'attitudine sperimentale nei confronti della Matematica, rende consapevoli delle potenzialità del linguaggio matematico e permette di valutare le proprie conoscenze, abilità e competenze.

I bozzetti umoristici dell'intero volume sono di Luigi Aluffi.