Primo Brandi, Anna Salvadori

Nuovi Percorsi di Matematica

Introduzione al Calcolo di Newton
secondo Matematica&Realtà

Volume I

Perugia, 2015

INTRODUZIONE

Nuovi Percorsi di Matematica segue, a quasi venti anni di distanza, il nostro precedente volume "Percorsi di Analisi Matematica". In questo lasso di tempo, al nostro usuale impegno di ricercatori e docenti si è affiancata una intensa attività di sperimentazione didattica e divulgazione scientifica, sviluppata attraverso Matematica&Realtà (www.matematicaerealta.eu), un progetto nazionale di innovazione didattica, basato sull'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.

Sin dal titolo si può intravedere la presenza di forti elementi innovativi in un solido impianto rimasto inalterato.

La presentazione degli argomenti avviene attraverso *percorsi guidati* ed *itinerari consigliati*, che si affiancano e si intrecciano come i cammini di una mappa stradale. Una sorta di MATH maps!

Il nuovo spirito che lo anima è quello di Matematica&Realtà: sviluppare negli studenti un'attitudine sperimentale nei confronti della Matematica, evidenziando il ruolo chiave della disciplina nella *modellizzazione*.

I contenuti sono quelli base di un primo corso universitario di Analisi Matematica: introduzione al Calcolo di Newton con cenni di Calcolo Numerico.
Affrontare questi argomenti con l'ottica di una educazione alla modellizzazione favorisce la comprensione dei concetti, stimola l'apprendimento attivo ed aiuta ad affrontare lo studio come scoperta, ma comporta necessariamente un radicale cambiamento della metodologia didattica.

La nostra proposta è quella di adottare, come guida, la stessa dinamica della modellizzazione. Le fasi concatenate del processo di modellizzazione possono infatti essere portatrici di una interessante valenza didattica nell'ottica della formazione e verifica delle *competenze*.

<u>Fase</u> 1. Prendendo l'avvio da situazioni problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione in termini matematici (modello), si crea il pretesto per introdurre concetti e strumenti in modo naturale e partecipato.
<u>Fase</u> 2. Queste conoscenze vengono acquisite e testate nella fase dello studio del modello. In questo ambito si rende necessario arricchire i concetti sviluppando l'indispensabile apparato operativo (regole, risultati teorici, abilità).
<u>Fase</u> 3. La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e fare emergere nuove esigenze.

L'acquisizione di strumenti e tecniche sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.
Il percorso educativo si evolve quindi come un gioco a ping-pong fra realtà e matematica, in un'elica ascendente.

Nell'introduzione dei concetti abbiamo privilegiato un approccio intuitivo e costruttivo per passare, solo in una seconda fase, alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria. Nel presentare strumenti e tecniche ci siamo avvalsi, per quanto possibile, dei quattro aspetti fondamentali: la descrizione intuitivo-verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio formale-matematico).

I *percorsi guidati* costituiscono una linea guida che conduce il lettore, per approssimazioni successive, dall'approccio intuitivo alla formalizzazione rigorosa, lo accompagna durante lo svolgimento completo della teoria e lo indirizza verso possibili applicazioni.
Le tappe principali di ciascun percorso sono:

— motivazioni: situazioni del quotidiano e/o problematiche che conducono o hanno condotto ad introdurre il concetto (con cenni all'evoluzione storica);

— definizione: dall'approccio intuitivo alla formalizzazione;

— esistenza e unicità: condizioni necessarie e condizioni sufficienti;

— calcolo: regole operative e tecniche di calcolo esatto (ove disponibili); introduzione alle tematiche ed agli strumenti di calcolo approssimato attraverso algoritmi numerici;

— applicazioni: ritorno alle esigenze iniziali, soluzione di alcuni problemi ed ulteriori sviluppi.

L'obiettivo principale dei percorsi è quello di presentare i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica ed alcuni rudimenti di Calcolo Numerico in modo da coniugare l'aspetto costruttivo e il più possibile intuitivo con lo stretto rigore, peculiarità di queste discipline.

Gli *itinerari consigliati* sono temi trasversali che ricorrono di frequente come la conservazione di proprietà (monotonia, linearità, ...), la distinzione fra proprietà globale e locale, il processo di evoluzione dal discreto al continuo e la riduzione dal continuo al discreto, *transitando* attraverso il numerabile.

Il testo consta di due parti, suddivise in capitoli.

Nel primo volume sono trattati gli algoritmi di *estremo superiore* ed *inferiore*, il concetto di *limite* ed elementi il *calcolo differenziale*. Sono presentati alcuni modelli dinamici discreti ed è affrontato il primo passo della riduzione dal continuo al discreto attraverso lo studio delle successioni.

Il secondo volume affronta il *calcolo integrale* e propone lo studio delle *equazioni differenziali* come modelli dinamici continui, evoluzione di quelli discreti studiati nella prima parte. Sono introdotte le *serie* e si completa la *riduzione al discreto* attraverso la presentazione di diversi strumenti, tecniche ed algoritmi di approssimazione numerica.

Al fine di fornire un supporto agli studenti, ciascun capitolo contiene un paragrafo dedicato a suggerimenti per la soluzione degli esercizi e lo svolgimento commentato di alcuni di essi.
Riteniamo infatti che a livello didattico, nella risoluzione di un problema, le motivazioni siano fondamentali quanto le risposte.
Una vasta scelta di esercizi proposti offre agli studenti l'opportunità di testare la preparazione e di auto-valutare il livello di apprendimento raggiunto.

Nel sito www.matematicaerealta.eu saranno disponibili supporti didattici multimediali a completamento del presente volume.

Il testo si rivolge in primis agli studenti universitari, ma è pensato anche come *manifesto* rivolto al mondo della Scuola in una fase molto delicata di fermento innovativo.
Può essere consultato per approfondire la preparazione in vista degli Esami di Maturità.
Può fungere da guida per i Docenti della Scuola di Secondo grado, interessati all'innovazione didattica nell'ambito della formazione e certificazione delle competenze.

PREMESSA AL VOLUME I

L'argomento chiave di un corso di Analisi Matematica è il concetto di limite. Scoglio principale nella didattica e nell'apprendimento di questo concetto è la difficoltà degli studenti ad interpretare la definizione come traduzione dell'idea intuitiva.
La nostra proposta è un nuovo approccio che conduce, per tappe successive, dall'idea intuitiva alla definizione.
Innanzi tutto si introducono *i concetti di estremo superiore ed inferiore, che sono proposti come estensione secondo Dedekind dei concetti elementari di massimo e minimo* (Capitolo 1). Questi algoritmi permettono di studiare l'evoluzione di modelli governati da successioni monotone o da coppie di insiemi contigui (Capitolo 2).
Per situazioni più complesse si profila la necessità di un algoritmo più efficiente, in grado di studiare il comportamento asintotico di successioni meno regolari. Nasce così l'idea dell'algoritmo di limite.
Il primo passo consiste nella traduzione naturale dell'idea intuitiva.
Il processo di limite di una funzione f in un punto x_0 è interpretato come una sequenza di immagini, la cui forma e dinamica dipendono dal comportamento di f in prossimità di x_0.
Questa rappresentazione dinamico-geometrica del processo individua (nella chiusura del codominio di f) un insieme non vuoto; la funzione possiede limite in x_0 solo e quando tale insieme è costituito da un solo elemento.
Per controllare l'evoluzione è sufficiente associare a ciascuna immagine un *cursore inferiore* ed un *cursore superiore* (rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore). Il limite esiste solo e quando i cursori si distribuiscono su due insiemi contigui; in questo caso i cursori forniscono *una operativa approssimazione del valore del limite* (approccio numerico).
L'usuale definizione $\varepsilon-\delta$ del limite (approccio formale) si ritrova come elementare caratterizzazione dell'elemento separatore di due insiemi contigui.
I primi due capitoli sono dedicati ad alcune problematiche chiave della modellizzazione, quali le strategie di ottimizzazione e i modelli di evoluzione dinamica.
Il concetto di limite viene introdotto nel Capitolo 4, dopo aver premesso alcuni concetti topologici nel Capitolo 3.
Il Capitolo 5 è dedicato allo studio dell'operatività del limite.
La continuità è sviluppata nel Capitolo 6.
I Capitoli 7 e 8 si occupano del concetto di derivata e delle sue innumerevoli possibilità applicative.