

INTRODUZIONE

Nuovi Percorsi di Matematica segue a quasi venti anni di distanza il nostro precedente volume "Percorsi di Analisi Matematica". In questo lasso di tempo, al nostro usuale impegno di ricercatori e docenti si è affiancata una intensa attività di sperimentazione didattica e divulgazione scientifica, sviluppata attraverso *Matematica&Realtà* (www.matematicaerealta.eu), un progetto nazionale di innovazione didattica, basato sull'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.

Sin dal titolo si può intravedere la presenza di forti elementi innovativi in un solido impianto che è rimasto inalterato.

La presentazione degli argomenti avviene attraverso *percorsi guidati ed itinerari consigliati*, che si affiancano e si intrecciano come i cammini di una mappa stradale. Una sorta di MATH maps!

Il nuovo spirito che lo anima è quello di *Matematica&Realtà*: sviluppare negli studenti un'attitudine sperimentale nei confronti della Matematica, evidenziando il ruolo chiave della disciplina nella *modellizzazione*.

I contenuti sono quelli base di un primo corso universitario di Analisi Matematica: introduzione al Calcolo di Newton con cenni di Calcolo Numerico.

Affrontare questi argomenti con l'ottica di una educazione alla modellizzazione favorisce la comprensione dei concetti, stimola l'apprendimento attivo ed aiuta ad affrontare lo studio come scoperta, ma comporta necessariamente un radicale cambiamento della metodologia didattica.

La nostra proposta è quella di adottare, come guida, la stessa dinamica della modellizzazione. Le fasi concatenate del processo di modellizzazione possono infatti essere portatrici di una interessante valenza didattica nell'ottica della formazione e verifica delle *competenze*.

Fase 1. Prendendo l'avvio da situazioni problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione in termini matematici (modello), si crea il pretesto per introdurre in modo naturale e partecipato concetti e strumenti.

Fase 2. Queste conoscenze vengono acquisite e testate nella fase dello studio del modello. In questo ambito si rende necessario arricchire i concetti sviluppando l'indispensabile apparato operativo (regole, risultati teorici, abilità).

Fase 3. La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e fare emergere nuove esigenze.

A sua volta l'acquisizione di strumenti e tecniche sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.

Il percorso educativo si evolve quindi come un gioco a ping-pong fra realtà e matematica, in un'elica ascendente.

Nell'introduzione dei concetti abbiamo privilegiato un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in una seconda fase alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria. Nel presentare strumenti e tecniche ci siamo avvalsi quanto possibile dei quattro aspetti fondamentali: la descrizione intuitiva-verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio formale-matematico).

I *percorsi guidati* costituiscono una linea guida che conduce il lettore, per approssimazioni successive, dall'approccio intuitivo alla formalizzazione rigorosa, lo accompagna durante lo svolgimento completo della teoria e lo indirizza verso possibili applicazioni.

Le tappe principali di ciascun percorso sono:

- motivazioni: situazioni del quotidiano e/o problematiche che conducono o hanno condotto ad introdurre il concetto (con cenni all'evoluzione storica);
- definizione: dall'approccio intuitivo alla formalizzazione;
- esistenza e unicità: condizioni necessarie e condizioni sufficienti;
- calcolo: regole operative e tecniche di calcolo esatto (ove disponibili); introduzione alle tematiche ed agli strumenti di calcolo approssimato attraverso algoritmi numerici;
- applicazioni: ritorno alle esigenze iniziali, soluzione di alcuni problemi ed ulteriori sviluppi.

L'obiettivo principale dei percorsi è quello di presentare i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica ed alcuni rudimenti di Calcolo Numerico in modo da coniugare l'aspetto costruttivo e il più possibile intuitivo con lo stretto rigore, peculiare di queste discipline.

Gli *itinerari consigliati* sono temi trasversali che ricorrono di frequente come la conservazione di proprietà (monotonia, linearità, ...), la distinzione fra proprietà globale o locale, il processo di evoluzione dal discreto al continuo e a sua volta la riduzione dal continuo al discreto, *transitando* attraverso il numerabile.

Il testo consta di due parti, suddivise in capitoli.

Nel primo volume sono trattati gli algoritmi di *estremo superiore* ed *inferiore*, il concetto di *limite* ed elementi il *calcolo differenziale*. Sono presentati alcuni modelli dinamici discreti ed è affrontato il primo passo della riduzione dal continuo al discreto attraverso lo studio delle successioni.

Il secondo volume affronta il *calcolo integrale* e propone lo studio delle *equazioni differenziali* come modelli dinamici continui, evoluzione di quelli discreti studiati nella prima parte. Sono introdotte le *serie* e si completa la *riduzione al discreto* attraverso la presentazione di diversi strumenti, tecniche ed algoritmi di approssimazione numerica.

Al fine di fornire un supporto agli studenti, ciascun capitolo contiene un paragrafo dedicato a suggerimenti per la soluzione degli esercizi e lo svolgimento commentato di alcuni di essi.

Riteniamo infatti che, a livello didattico, nella risoluzione di un problema le motivazioni siano fondamentali quanto le risposte.

Una vasta scelta di esercizi proposti offre agli studenti l'opportunità di testare la preparazione e di auto-valutare il metodo di apprendimento.

Nel sito www.matematicaerealta.eu saranno disponibili supporti didattici multimediali a completamento del presente volume.

Il testo si rivolge in primis agli (ai nostri) studenti universitari, ma è pensato anche come *manifesto* rivolto al mondo della Scuola in una fase molto delicata di fermento innovativo. Può essere consultato per approfondire la preparazione in vista degli Esami di Maturità. Può fungere da guida per i Docenti della Scuola di Secondo grado interessati all'innovazione didattica in tema di formazione e certificazione delle competenze.

PREMESSA AL VOLUME II

Nella prima parte di questo volume è stato proposto un approccio innovativo al concetto di limite, argomento chiave di un corso di Analisi Matematica, basato su un processo dinamico-geometrico che traduce in modo naturale l'idea intuitiva.

Nello stesso spirito viene qui introdotto l'integrale alla Riemann (Capitolo 9) come processo costruttivo ispirato al metodo di esaurimento. Una sua lettura conduce in modo naturale al teorema fondamentale del calcolo integrale che, come è ben noto, fornisce un importante collegamento tra la teoria dell'integrazione e quella della *anti-derivazione* (Capitolo 9).

Le principali tecniche per il calcolo di antiderivate sono illustrate nel Capitolo 10, corredate di numerosi esercizi svolti. Sempre nel Capitolo 10, come è nostra consuetudine, sono proposte varie applicazioni del concetto di integrale a situazioni del mondo reale.

La problematica delle equazioni differenziali, strumento chiave della modellizzazione matematica nel continuo, è introdotta nel Capitolo 11. In questo contesto viene discussa la versione continua dei modelli dinamici discreti di crescita/decadimento presentati nel Capitolo 2, completata da svariate applicazioni di situazioni reali.

Il Capitolo 12 è dedicato alla classe delle equazioni differenziali lineari, del I e II ordine.

Le serie sono studiate nel Capitolo 13. In quello successivo viene affrontata la problematica dell'approssimazione di una funzione, mediante i polinomi di Tylor-McLaurin e successivamente la sua sviluppabilità in serie di potenze.

Gli ultimi cinque capitoli sono dedicati alle tematiche del *calcolo approssimato* con l'obiettivo di presentare l'*altra faccia* del Calcolo Newtoniano. Vengono così proposti gli elementi base di *Calcolo Numerico* direttamente collegati alle tematiche del testo, con lo spirito di fornire un'ottica complementare a quella già sviluppata.

Nel Capitolo 15 dopo una sezione introduttiva sulla valutazione-stima degli errori e controllo della loro propagazione, viene approfondito l'impianto del processo iterativo, struttura base di ogni algoritmo numerico, con l'indagine sul comportamento asintotico delle iterate: stabilità, orbite, bacini di attrazione e punti fissi.

I Capitoli 16 e 19 sono dedicati agli algoritmi di approssimazione delle equazioni, numeriche e differenziali, rispettivamente.

Il *fitting* di dati, argomento precipuo del calcolo numerico, è illustrato nel capitolo 17 dove vengono discusse sia la regressione lineare che l'interpolazione (polinomiale e mediante spline). Quest'ultima è quindi adottata come strumento per approssimare l'integrale nel Capitolo 18.