

Primo Brandi, Anna Salvadori

I modelli matematici entrano a scuola

Percorsi di sperimentazione didattica

C – Dai modelli lineari ai primi modelli non lineari

Perugia, 2015

Premessa

I modelli matematici entrano a scuola ... M&R li prende per mano

Le ultime indicazioni ministeriali sui nuovi curricula della Scuola Superiore prescrivono con forza una svolta nell'insegnamento della matematica.

Il profilo generale delle competenze in matematica per il "nuovo" liceo scientifico inizia con queste parole: *Al termine del liceo lo studente dovrà padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale.*

e prosegue

Dovrà inoltre possedere i primi elementi della modellizzazione matematica... conoscere il concetto di modello matematico e la specificità del rapporto che esso istituisce tra matematica e realtà.

Le linee guida per i "nuovi" tecnici e professionali pongono come obiettivo fondamentale *l'acquisizione di strumenti matematici necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate*

e prescrivono di proporre (sin dal primo biennio)

problemi collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Dopo lo *shock* prodotto dalle indagini OCSE-PISA, anche le prove INVALSI sono sempre più orientate verso problematiche tratte dall'esperienza quotidiana.

Matematica&Realtà (M&R), che da oltre quindici anni promuove l'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico come *motore* per un profondo rinnovamento dell'insegnamento-apprendimento della matematica, accoglie con soddisfazione questa importante inversione di rotta e mette a disposizione del mondo della scuola il suo know-how. L'esperienza acquisita sul campo dai *docenti pionieri* collaboratori di M&R e il ricco materiale didattico prodotto e sperimentato, potranno essere un valido aiuto anche per gli altri insegnanti (<http://www.matematicaerealta.it>).

I *Percorsi di sperimentazione didattica* sono rivolti ai Docenti e presentano alcuni degli argomenti di modellizzazione matematica che sono stati sperimentati nei laboratori M&R, a livello nazionale.

I modelli matematici entrano a scuola Percorsi di sperimentazione didattica

Piano dell'opera

Percorso	Tema	Destinatari
A	Elementi base di matematica della realtà (Riferimenti e codici del quotidiano, rappresentazione grafica della realtà)	Scuole di ogni ordine e grado
B	Proporzionalità e linearità nella vita reale	Scuola secondaria di I e II grado
BS	Introduzione al linguaggio matematico della realtà (media a scuola e nel quotidiano, equazioni e disequazioni elementari)	Scuola secondaria di II grado
C	Modelli elementari della realtà I (Modelli lineari e primi modelli non lineari)	Scuola secondaria di II grado
D	Modelli elementari della realtà II (Modelli non lineari elementari: esponenziali e periodici)	Scuola secondaria di II grado
E	Calculus in context	Scuola secondaria di II grado

Una direzione per il rinnovamento: educare alla modellizzazione

La proposta M&R consiste in una *educazione alla modellizzazione matematica della realtà*, con strumenti elementari. Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale e, anche se il cammino sarà lungo e non facile, ormai il dado è tratto!

Adottando lo stile M&R sarà molto più facile formare e certificare quelle *competenze matematiche* che lo studente potrà spendere nella vita sociale come cittadino consapevole e attivo.

Nell'opinione generale, in particolare fra i laureati in matematica, c'è la convinzione che i modelli matematici siano un argomento difficile, super specialistico, che richiede strumenti tecnici e metodologici avanzati. Questo è certamente vero per la matematica applicata prodotta o utilizzata dai *professionisti*, ma la modellizzazione è innanzi tutto una attitudine mentale prima che un importante strumento di ricerca.

Siamo convinti e lo sperimentiamo ogni giorno (sia nei nostri corsi universitari di primo livello che nell'ambito dei Laboratori M&R) che si può educare alla modellizzazione affrontando problematiche della realtà con strumenti matematici elementari.

A nostro avviso si può, anzi si *deve* iniziare un percorso di educazione alla modellizzazione sin dai primi anni della formazione scolastica. Del resto questo è quello che M&R propone e sperimenta da tanti anni, principalmente nella scuola secondaria di II grado. Negli ultimi anni il raggio di azione di M&R si è ampliato alla Scuola secondaria di I grado e anche alla primaria.

Numeri M&R				
a.a.	Laboratori	Istituti	Docenti	Studenti
2005-06	21	42	45	1321
2006-07	74	47	90	2515
2007-08	78	48	94	2505
2008-09	72	45	104	1596
2009-10	69	42	102	1941
2010-11	75	45	94	1921

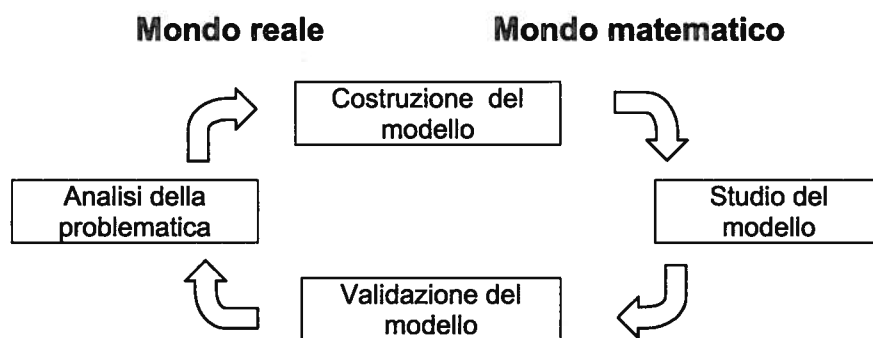
M&R ha al suo attivo numerosi corsi di formazione Docenti organizzati in sinergia con varie Istituzioni Scolastiche. Nel 2009 M&R, in partenariato con la Rete Archimede di Terni, ha vinto il Concorso *Innovadidattica* del MIUR con il Progetto RealM@t, che ha prodotto altre interessanti e stimolanti ricette in continuità fra Scuola secondaria di I e II grado sempre nell'ottica della modellizzazione della realtà. Sulla spinta di *Innovadidattica*, nell'a.s. 2010-11, in sinergia con l'Ufficio Scolastico Regionale Umbria, M&R ha dato vita al Progetto Cartesio, un corso di formazione e sperimentazione didattica rivolto ai docenti di matematica delle scuole di ogni ordine e grado.

Il modello matematico

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.

Il modello matematico di un "fenomeno" del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua "simulazione", utilizzando un linguaggio simbolico universale.

Il processo di modellizzazione procede per fasi successive, che creano un'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.



Fasi del processo di modellizzazione

- Fase 1** Analisi della problematica. Si prende in esame la problematica in oggetto e si cerca di stabilire quali siano i dati noti e quali quelli incogniti. Si individuano eventuali legami tra le variabili in gioco e/o eventuali vincoli imposti dalla situazione.
- Fase 2** Costruzione del modello. Dopo aver eventualmente semplificato il problema da affrontare (es. eliminando alcune variabili o scomponendo il problema in sotto-problemi) si traduce la questione in relazioni matematiche tra i dati e le incognite.
- Le prime due fasi costituiscono il passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono "tradotti in linguaggio" matematico (modello).
- Fase 3** Studio del modello. La fase si svolge tutta all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello. Si discute e (se possibile) si risolve il modello matematico. Importante distinguere i tre aspetti: esistenza, unicità, calcolo delle soluzioni (esatto o approssimato)
- La costruzione e lo studio del modello promuovono un'analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.
- Fase 4** Validazione del modello. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per confrontare la soluzione del modello con il problema iniziale. Questo raffronto è fondamentale in quanto

consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Se la verifica delle soluzioni trovate “a tavolino” *con la realtà* rivela delle inadeguatezze, si può procedere a un secondo processo di modellizzazione, che tenga conto delle questioni emerse nel primo tentativo. Si individua così un modello più adatto a gestire il problema in esame.

Successivi perfezionamenti o varianti conducono ad un prototipo virtuale via via più efficiente. Questa progressiva evoluzione richiede in genere strumenti e tecniche matematiche sempre più complessi e articolati.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all’astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po’ come si fa con le costruzioni *Legò*¹, in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. E’ in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

Modellizzazione e strategie didattiche

Visti gli spazi sempre più esigui riservati all’insegnamento della matematica, non è proponibile una educazione alla modellizzazione *come scoperta*, ma la si può guidare come *bisogno intellettuale*. Ricorrendo alle collaudate tecniche di marketing, gli insegnanti dovrebbero far nascere negli studenti, di volta in volta, “nuovi bisogni di curiosità intellettuale” per poi *guidarli sulla via della loro soddisfazione*.

La stessa dinamica della modellizzazione dovrebbe guidare il percorso di insegnamento-apprendimento.

- Fasi 1-2** Partendo da situazioni e problematiche della realtà, con l’obiettivo della loro formalizzazione matematica (modello), si possono introdurre in modo naturale concetti e strumenti matematici che vengono acquisiti e testati nella fase dello studio del modello matematico.
- Fase 3**
- Fase 4** La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e far emergere nuove esigenze.

A sua volta, l’acquisizione di strumenti matematici sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una “rilettura” di quelli già affrontati.

ping-pong In questo modo, come in un gioco a ping-pong tra mondo reale e mondo matematico, il percorso si evolve in un’elica ascendente.

Alcune raccomandazioni ai Docenti

L’esperienza maturata negli ultimi 15 anni, prima con i percorsi *Orientamatica*² e successivamente nei laboratori *Matematica&Realtà*, nonché nei nostri corsi universitari, ci induce a formulare alcuni suggerimenti per i Colleghi che intendono intraprendere il percorso di educazione alla modellizzazione.

- Intuizione e formalizzazione** Introdurre i concetti privilegiando un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in un secondo tempo alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria.
Incoraggiare gli studenti a proporre loro stessi definizioni e a costruire dimostrazioni.

¹ Le costruzioni *Legò* sono state introdotte recentemente come strumento didattico nelle scuole primarie.

² Corsi di formazione, orientamento e auto-valutazione rivolti a studenti del triennio degli Istituti Superiori con lo scopo di integrare la formazione scolastica proiettandola verso gli studi post-diploma e contemporaneamente favorire l’inserimento nel mondo del lavoro o promuovere un orientamento consapevole alla scelta universitaria.

- 4 aspetti Strumenti e tecniche dovrebbero essere presentati avvalendosi di quattro aspetti: la descrizione verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio matematico).
Le rappresentazioni multiple incoraggiano gli studenti a riflettere sul significato di quanto viene loro proposto.
- Problemi veri Si raccomanda di proporre **solo problemi veri**, non verosimili!
Le problematiche saranno tratte dalle mille proposte offerte dalla vita quotidiana (reperibili attraverso giornali, TV, internet, depliant pubblicitari, ...) presentati nel loro contesto originale, né adattati, né semplificati, al fine di consentire una corretta educazione alla modellizzazione.
- Esercizi intelligenti Ridurre al minimo gli esercizi di routine, privilegiando le questioni che richiedono il coinvolgimento dello studente ed invitano alla riflessione.
- Atteggiamento studenti Le parole chiave del percorso di apprendimento sono: *esplorare, comprendere, comunicare*.
Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a scrivere e leggere argomentazioni matematiche, discutere e riflettere sui concetti, confrontare strumenti e tecniche.
In ogni fase del percorso di apprendimento dovrebbero essere in grado di riflettere su *cosa stanno facendo, perché lo fanno e cosa si aspettano che accada*.
- Nuove tecnologie Le nuove tecnologie offrono un'importante strumento educativo non solo perché, sollevando dagli aspetti più tecnicistici, permettono di dedicare più tempo alla comprensione dei concetti, ma anche perché pongono i ragazzi di fronte a difficoltà ed imprevisti che, se gestiti in modo consapevole e riflessivo, costituiscono un'occasione preziosa di crescita culturale.
- La nostra esperienza ha evidenziato che ancorare l'insegnamento della matematica alla vita reale, oltre a stimolare l'interesse, favorisce la partecipazione attiva e responsabile, sviluppa un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, rende consapevoli delle potenzialità del linguaggio matematico e permette di valutare le proprie conoscenze, abilità e competenze.

Percorso C

Modelli elementari della realtà dai modelli lineari ai modelli non lineari

Destinatari: Scuola Secondaria di II grado

Nuclei tematici: Relazioni e funzioni

Nuclei di processo: Risolvere e porsi problemi, Argomentare, congetturare, dimostrare

Introduzione

In questo percorso proponiamo una introduzione alla modellizzazione matematica del quotidiano. L'argomento si inserisce in un processo più articolato che ha lo scopo di illustrare le potenzialità della *rappresentazione mediante funzioni elementari* per la comprensione e la soluzione di problemi del quotidiano.

Il tema consente di acquisire consapevolezza della "dinamica della modellizzazione", che si basa su una continua interazione fra mondo reale e mondo matematico.

Sul piano didattico questa interazione offre lo spunto per una dinamica a ping-pong. Da una parte, infatti, consente di testare ed approfondire argomenti già noti che nella modellizzazione acquistano una "nuova vita", dall'altra le esigenze della modellizzazione stimolano l'introduzione di nuovi concetti e strumenti.

Si consiglia la lettura del Capitolo 4 di [4] e dei Capitoli 2 e 5 di [2], dove potranno essere trovati ulteriori spunti di flessione. Altre letture consigliate sono elencate in bibliografia.

Il percorso sarà aggiornato in tempo reale nella piattaforma moodle con il *materiale caldo* proveniente dai laboratori in corso (<http://www.matematicaerealta.unipg.it/moodle>).

I bozzetti umoristici sono di Luigi Aluffi.

Conoscenze	<p>Proporzionalità diretta e inversa. Funzioni lineari e lineari a tratti, funzioni quadratiche, semplici funzioni razionali. Equazione della retta. Zeri e segno di una funzione. Crescenza/decrecenza. Massimi/minimi. Concavità /convessità.</p>
Abilità	<p>Risoluzione di equazioni e disequazioni di I grado ad una incognita e di sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite. Risoluzione di equazioni e disequazioni di II grado. Interpretazione geometrica delle equazioni e disequazioni di II grado. Risoluzione di esempi "scelti" di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.</p>
Competenze	<p>Individuare relazioni di linearità o non linearità tra grandezze in situazioni problematiche. Riconoscere e interpretare elementari modelli lineari in contesti di vita reale. Modellizzare e risolvere, sia per via grafica che algebrica, problemi tratti dall'esperienza quotidiana che si formalizzano con equazioni e disequazioni di I grado e di II grado.</p>

Il percorso in breve

Segmento C1 – Fenomeni e funzioni lineari

- Step 1** Partire da situazioni della realtà (con lo scopo di comprendere un fenomeno o analizzare un problema) per introdurre il *modello lineare*.
Inizialmente privilegiare la rappresentazione *numerica* o *geometrica* a quella *formale*. Partendo da un approccio *intuitivo*, in semplici situazioni *qualitative*, evidenziare come la dipendenza *lineare* fra due variabili significa che se una raddoppia [rispettivamente dimezza], raddoppia [dimezza] anche l'altra.
Mediante la similitudine fra triangoli si può facilmente collegare la proporzionalità fra le variabili (aspetto numerico) con l'allineamento fra i punti (aspetto geometrico).
Passare infine alla rappresentazione formale.
Sarebbe opportuno affrontare contemporaneamente sia situazioni di linearità, che di non linearità.
- Step 2** Una volta acquisito il modello, si possono approfondire gli aspetti legati ai contenuti. Il ping-pong fra mondo reale e mondo matematico consente di progredire contemporaneamente nel fornire contenuti e formare competenze.
Ad esempio affrontare le equazioni di I grado e i sistemi lineari come soluzione di fenomeni della realtà; analogamente le disequazioni.
- Step 3** Le problematiche affrontate porteranno a modifiche o perfezionamenti del modello lineare *puro* (modelli del tipo $f(x) = ax + b$, funzioni lineari a tratti, funzione modulo).
I problemi reali collegati al modello aiutano a comprendere il *ruolo dei parametri*.

Segmento C2 – Dai modelli lineari ai primi modelli non lineari

- Fenomeni o problematiche del quotidiano non lineari portano all'esigenza di modelli diversi (es. parabolici o iperbolic).
Il percorso intrapreso per i modelli lineari si può ripetere in modo del tutto analogo. Così si possono affrontare le equazioni di II grado e le disequazione intere o fratte.
- Raccomandazioni** Nello svolgimento del percorso verrà *naturale* introdurre i concetti di crescita/decrecenza, tasso di variazione (rapporto incrementale), concavità/convessità, massimo/minimo. Non si deve temere di *anticipare* questi concetti!
Nel trattare le equazioni, disequazioni di I o II grado, si raccomanda di affiancare la rappresentazione grafica all'aspetto algebrico.
Nel rappresentare dati (sperimentali o forniti dai media) verrà spontaneo introdurre il concetto di *interpolazione*. E' importante che i ragazzi acquisiscano questo concetto (senza entrare nei dettagli tecnici degli algoritmi) poiché le informazioni diffuse dai media si servono molto spesso di interpolazioni per illustrare dati e previsioni.
- Osservazione** Nello svolgimento del percorso daremo ampio spazio agli aspetti della modellizzazione e del ping-pong fra mondo reale e mondo matematico, trascurando la trattazione standard dei contenuti, che resta parte integrante del percorso.
Ci limiteremo ad alcuni suggerimenti, quando necessario.