Esame di Stato 2015 - Tema di Matematica

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2.
Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.
Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1.
Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

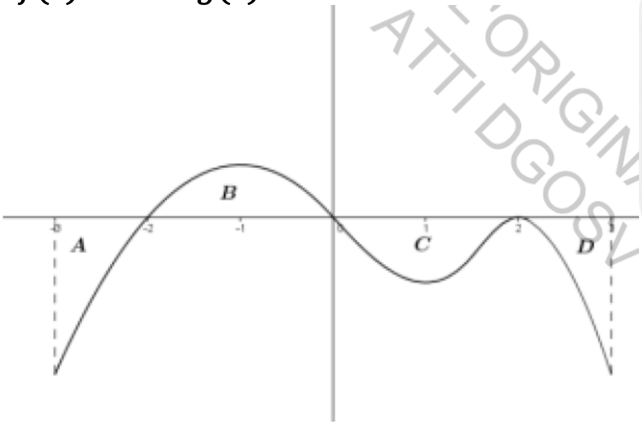

Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

Il quesito è posto in modo da lasciare un'ampia gamma di possibili risposte. Infatti il grado (minimo) del polinomio dipende dai vincoli che si prendono in considerazione. Il testo ne cita 7, ma altri saltano agli occhi dalla *lettura* del grafico.

Precisamente, i vincoli "espliciti" nel testo sono:

- tre punti di tangenza orizzontale (3 condizioni)
- valore dell'integrale in quattro intervalli distinti (4 condizioni)

i seguenti vincoli "impliciti" sono deducibili dal grafico:

- tre zeri (3 condizioni)
- $f(-3) = f(3)$ (1 condizione)

In tutto sono 11 condizioni, quindi il polinomio deve essere almeno di grado 10.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

Tenuto conto che $g' = f$, dal grafico di f si ha

intervallo	$[-3,-2[$	$]-2,0[$	$]0,2[$	$]2,3]$
segno f	negativa	positiva	negativa	negativa
andamento g	decresce	cresce	decresce	decresce
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
		min	max	

quindi la funzione g ha un massimo relativo in $x = 0$, minimo relativo in $x = -2$ e un flesso discendente a tangente orizzontale in $x = 2$.

Università degli Studi di Perugia
Dipartimento di
Matematica e Informatica
Via Vanvitelli, 1
06123 Perugia
Italia
Matematica & Realtà
Tel: +39 075 585 5031
Fax: +39 075 585 5024
E-mail: progettomatematicaerealta@unipg.it

Poiché $g''=f'$, dal grafico di f si può dedurre

intervallo	$[-3,-1]$	$[-1,1]$	$[1,2]$	$[2,3]$
monotonia f	cresce	decresce	cresce	decresce
segno g''	positiva	negativa	positiva	negativa
Andamento g	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

quindi la funzione g è convessa (o concava verso l'alto) negli intervalli $[-3,-1]$ e $[1,2]$.

3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}$.

Per rispondere al quesito, osserviamo che le primitive della funzione sono rappresentate mediante la funzione integrale:

$$g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt+c \quad c\in R$$

Dalla condizione $g(3)=-5 \quad \Leftrightarrow \quad -5=\int_{-3}^{3} f(t)dt+c$, sulla base delle informazioni fornite dal testo, si deduce

$$\int_{-3}^{3} f(t)dt=-A+B-C-D=-2+3-3-1=-3$$

e possiamo così determinare il valore del parametro che individua la funzione g:

$$-5=-3+c \quad \Rightarrow \quad c=-2 \qquad\qquad g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt-2.$$

Risulta quindi

$$g(0)=\int_{-3}^{0} f(t)dt-2=-A+B-2=-2+3-2=-1$$

Pertanto il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}$ si presenta come rapporto fra due infinitesimi.

Tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-3}^{x} f(t)dt-1}{2x}$$

applicando il teorema di l'Hospital (dopo aver osservato che tutte le ipotesi sono verificate !) , la questione si riduce al calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}=0$$

4. Sia $h(x)=3\cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx=3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx$$

conviene adottare il metodo di integrazione per sostituzione, che consente di ricondurlo a quello della funzione f. Infatti, posto $2x+1=t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t-1}{2}$, si ha $dx=\frac{dt}{2}$ e

$$\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt=-\frac{3}{2}$$

In definitiva
$$\int_{-2}^{1} h(x)dx=-\frac{9}{2}$$

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
Università degli Studi di Perugia
Dipartimento di
Matematica e Informatica
Via Vanvitelli, 1
06123 Perugia
Italia
Matematica & Realtà
Tel: +39 075 585 5031
Fax: +39 075 585 5024
E-mail: progettomatematicaerealta@unipg.it