Ruben Sabbadini, Liceo Farnesina - Roma

# Equazioni differenziali:

## *matematica & realtà*

Convegno Matematica & Realtà
(Hotel Esplanade - Viareggio)
9-11 Ottobre 2015

La novità delle recenti

**indicazioni nazionali per la matematica**

**sono le**

**equazioni differenziali**

**non è una cattiva cosa**

**è una grande opportunità**

(non è vero che sono difficili)

**sono un'importante finestra sulla realtà**

**non solo per la**

**fisica**

ma per molte altre materie

**è anche possibile**

**vederne**

**le soluzioni**

**senza**

**risolverle!**

(ve ne darò un saggio)

# Ricordate

# la Meccanica quantistica

# è la soluzione di

# un'equazione differenziale

l'equazione di Schroedinger

**non vi preoccupate**
**sarà un giochetto**

**anche per gli**
**studenti**

è più divertente che difficile!

# Crescita di una popolazione
## (di batteri)

all’inizio ho $N_0$ batteri

Riuscite a convincervi
che la crescita
è proporzionale a $N_0$ ?

più sono, più si riproducono

Come si scrive?
se N(t) è il numero di batteri in funzione di t, la crescita è:

$$\frac{dN}{dt}$$

Come si scrive che N(t) è proporzionale alla crescita?

$$N(t) = k\frac{dN}{dt}$$

$$N(t) = k\frac{dN}{dt}$$

N(t) può essere:

- un polinomio? No!
- un logaritmo? No!
- un seno o coseno? No
- ....

C'è un'unica possibilità:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t}:$$

Ecco a cosa servono gli esponenziali!

(ecco cos'è $e^x$!)

L’unica funzione …

… simile alla sua derivata!

$$e^{\alpha t} \propto \frac{de^{\alpha t}}{dt}$$

proprio quello che ci serve!

da $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$ abbiamo:

$$\frac{d(N_0 e^{\alpha t})}{dt} = \alpha N_0 e^{\alpha t}$$

per cui (sostituendo in

$N(t) = k\frac{dN}{dt}$):

$$\cancel{N_0}\ \cancel{e^{\alpha t}} = k\ \cancel{N_0}\ \alpha\ \cancel{e^{\alpha t}}$$

ovvero $1 = k\,\alpha$

(polinomio caratteristico)

Quindi questa

$N(t) = k\frac{dN}{dt}$ si riduce a:

$$1 = k\,\alpha$$

(polinomio caratteristico)

a $N(t)$ si sostituisce 1

e $\alpha$ alla sua derivata $\frac{dN}{dt}$

$$N(t) = k\frac{dN}{dt}$$

$$1 = k\,\alpha$$

(polinomio caratteristico)

(se volete essere colti è la Trasformata di Laplace)

# Agli studenti serve questa regola:

$$N(t) = k\frac{dN}{dt}$$

$$1 = k\,\alpha$$

(polinomio caratteristico)

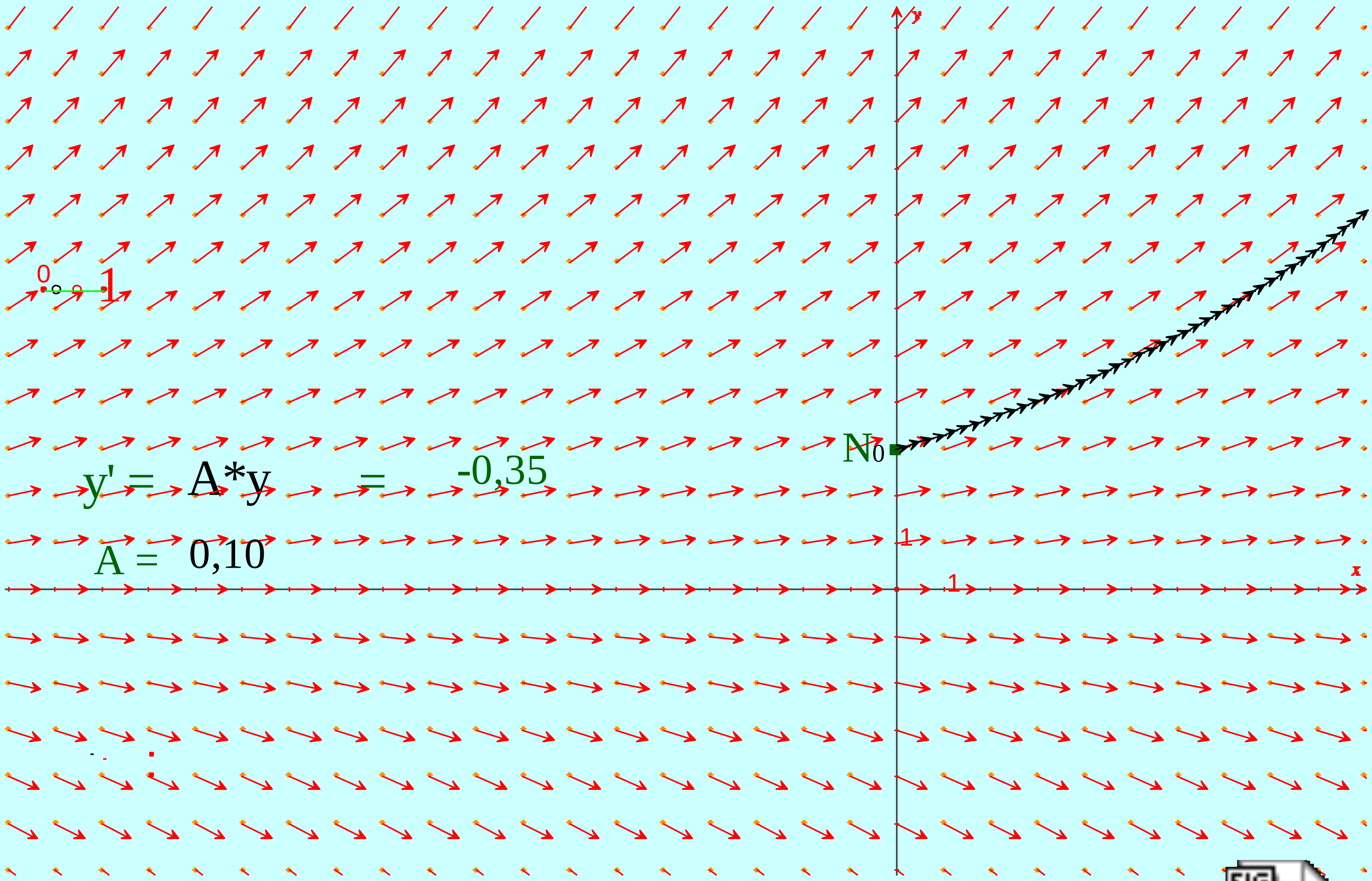
da sostituire in

$$N(t) = N_0\,e^{\alpha t}$$

# Quindi:

$$N(t) = N_0 e^{t/k}:$$

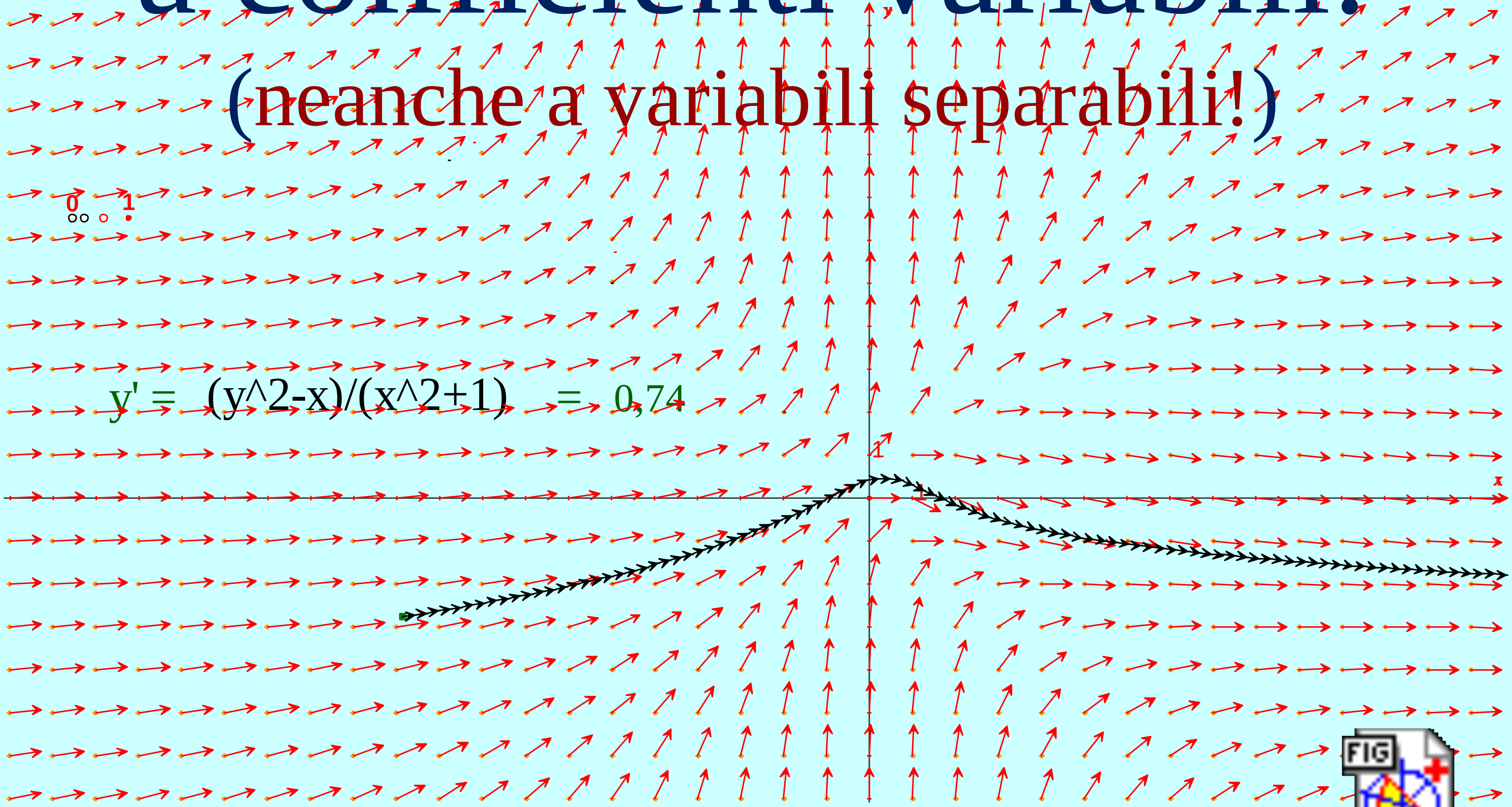
(Cabri ci permette di "vedere" tutto questo!)




_.fig

# Vediamo un'equazione a coifficienti variabili:

(neanche a variabili separabili!)




_.fig

# Crescita di un conto in banca

Abbiamo un capitale iniziale $C_0$
e un tasso di interesse *i*

al *primo anno*:

$$C = C_0(1+i)$$

*all'n-simo anno*:

$$C = C_0(1+i)^n$$

Se ricevessimo un interesse mensile pari a *i/12*

al primo anno

$$C = C_0(1+i/12)^{12}$$

con un interesse giornaliero

$$C = C_0(1+i/365)^{365}$$

Se lo frazionassimo
al minuto, al secondo,
ad una frazione k-esima
di anno

al primo anno

$$C = C_0(1+i/k)^k$$

mandando *k* all'infinito

al primo anno

$$C = \lim C_0(1+i/k)^k =$$

$$= C_0\, e^{it} \quad (t \text{ in anni})$$

Si arriva allo stesso risultato da $dC/dt=iC$

# infatti:

$$\frac{dc}{dt} = i\,c(t)$$

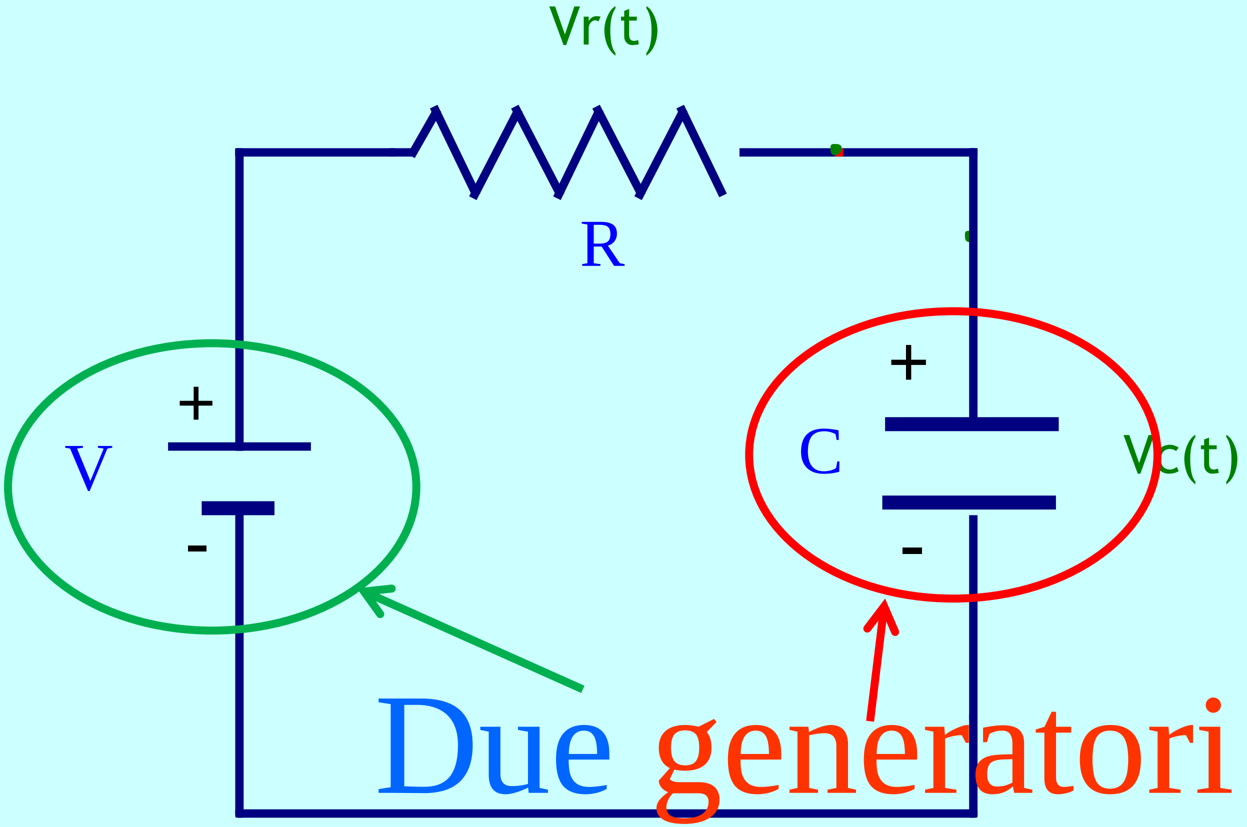
$$\alpha = \ i\,1$$

(polinomio caratteristico)

## da sostituire in

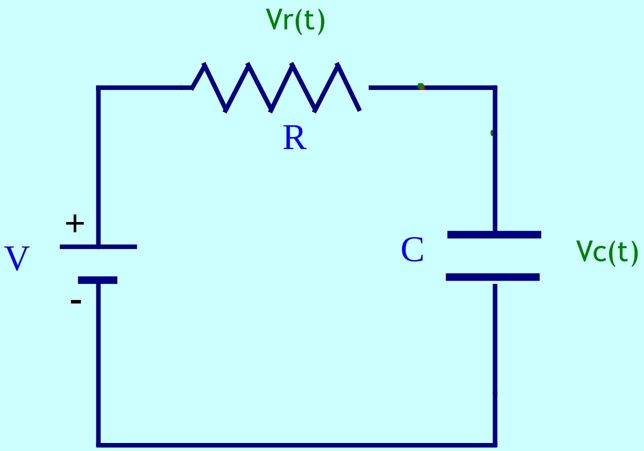
$$C(t) = C_0\, e^{\alpha t} = C_0\, e^{it}$$

# Circuito RC




$$V\text{-}v_C = v_R = Ri$$

# Circuito RC



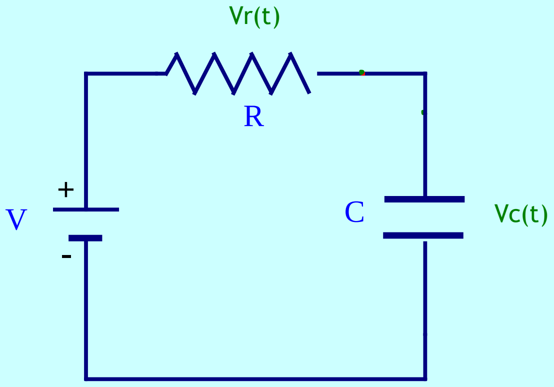

$$V\text{-}v_C = v_R = Ri$$

ma:

$$v_C = q/C \quad (\textit{legge del condensatore})$$

quindi: $V - q/C = Ri$

# Circuito RC




in $V - q/C = Ri$

ci sono 2 variabili ($q$ e $i$)

Allora deriviamo:

$$-\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = R\frac{di}{dt}$$

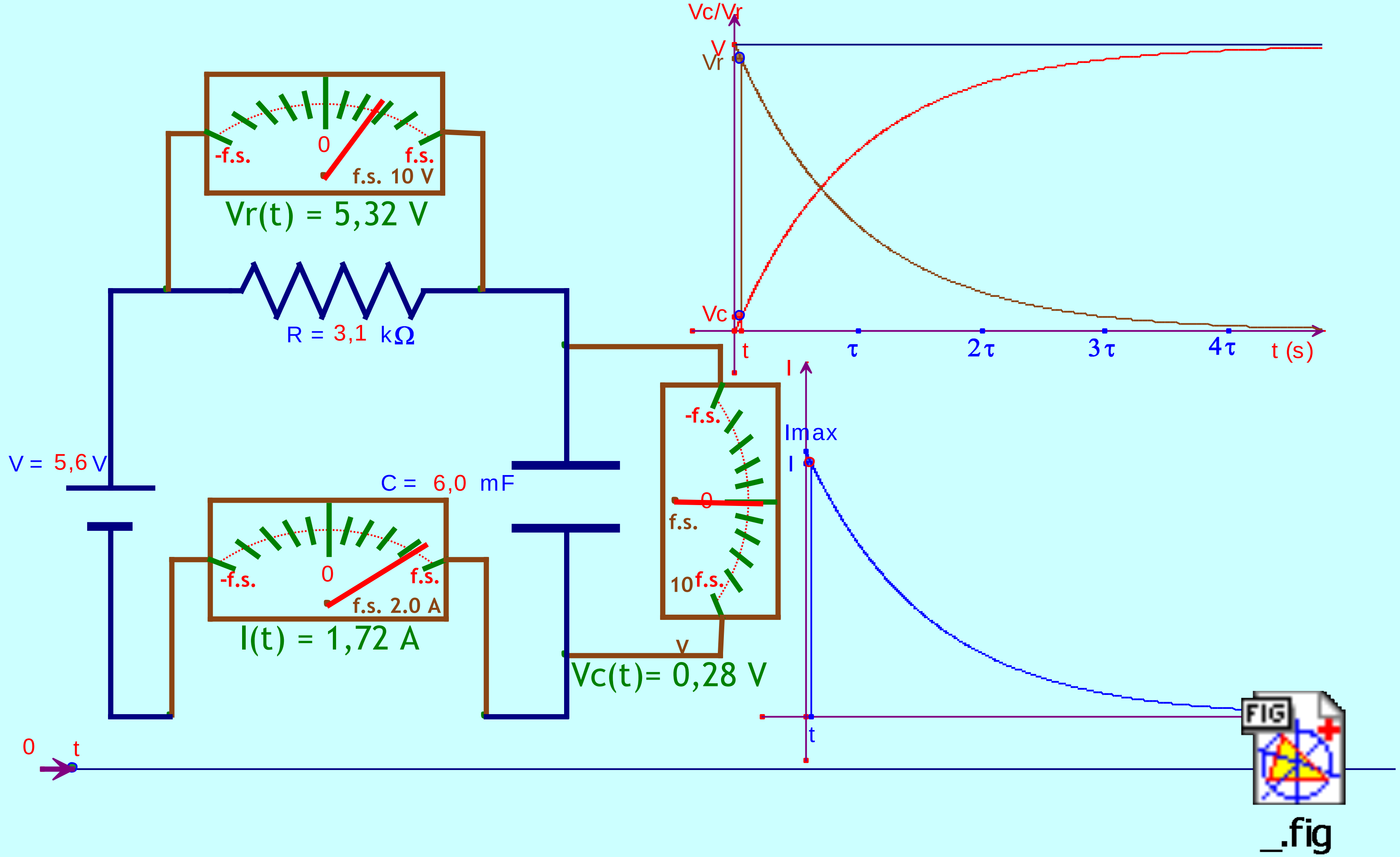
$$-\frac{1}{C}i = R\frac{di}{dt}$$

La stessa equazione di prima!

con questo polinomio caratteristico!

$$-\frac{1}{C} = R\,\alpha \qquad \alpha = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

# Circuito RC



Vr(t) = 5,32 V
R = 3,1 kΩ
V = 5,6 V
C = 6,0 mF
I(t) = 1,72 A
Vc(t)= 0,28 V
f.s. 10 V
f.s. 2.0 A
Vc/Vr
Vc
Vr
Imax
t (s)
_.fig

Vediamo un'Equazione differenziale del II ordine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x)$$

(tipicamente la legge di Newton che governa tutta la meccanica)

# Conviene fare semplici manipolazioni matematiche:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{1}{m}F(x)$$

è la velocità $v$!

(sono abbastanza standard ma …

non si insegnano!)

deriviamo rispetto a $x$ invece che $t$!)

# Quindi da:

$$\frac{dv}{dx}v = \frac{1}{m}F(x)$$

otteniamo facilmente

(integrando):

$$\int_0^x v\,dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0{}^2) = \frac{1}{m}\int_0^x F(x)dx$$

(la legge di conservazione dell' energia!)

# Ma a noi serve così:

$$v = \pm\sqrt{{v_0}^2 + \frac{2}{m}\int_0^x F(x)\,dx}$$

(questo è, ovviamente, il lavoro)

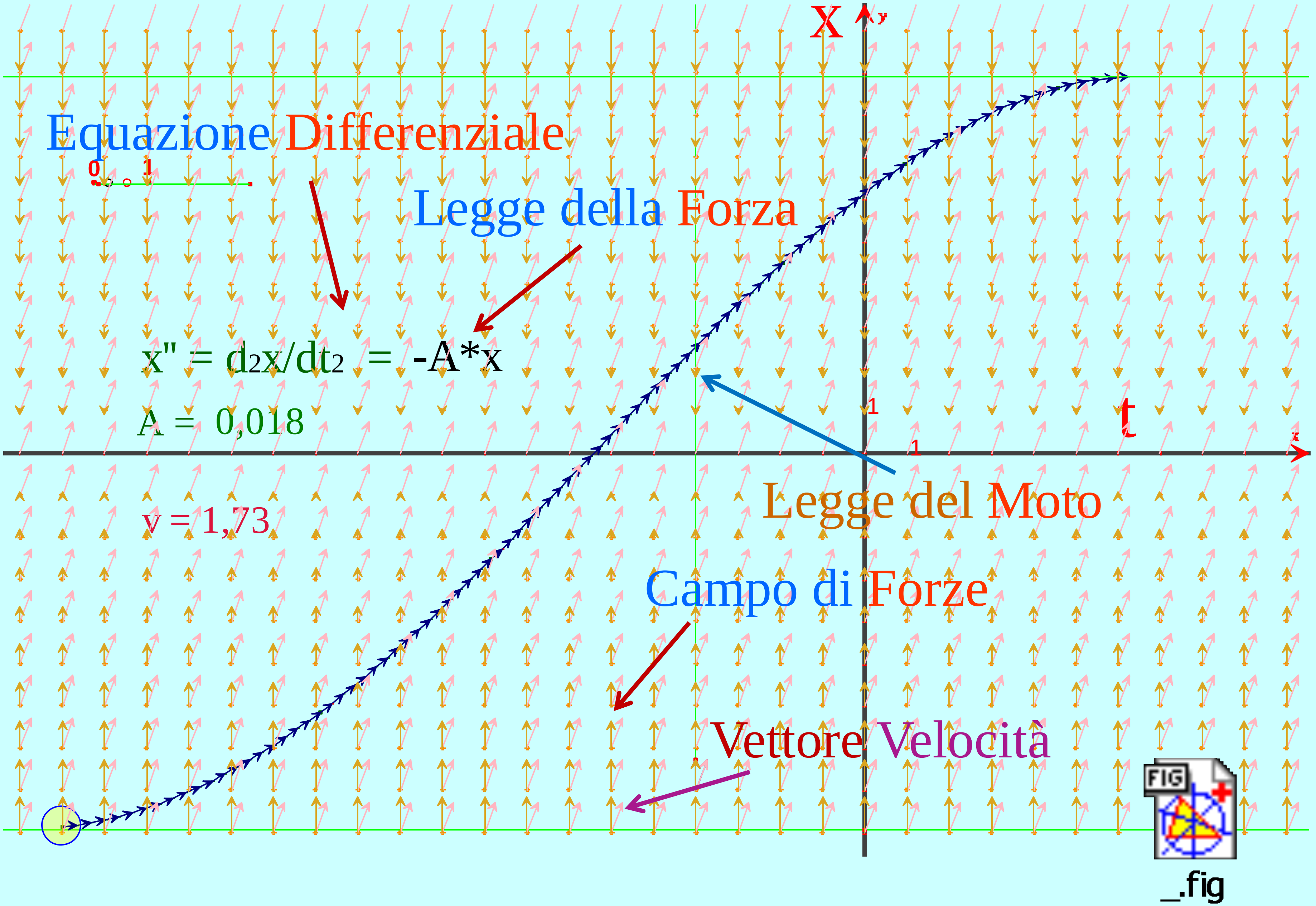
(mai vista? lo so! gravi errori della didattica)

# Cosa abbiamo fatto?

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{ {v_0}^2 + \frac{2}{m} \int_0^x F(x)dx }$$

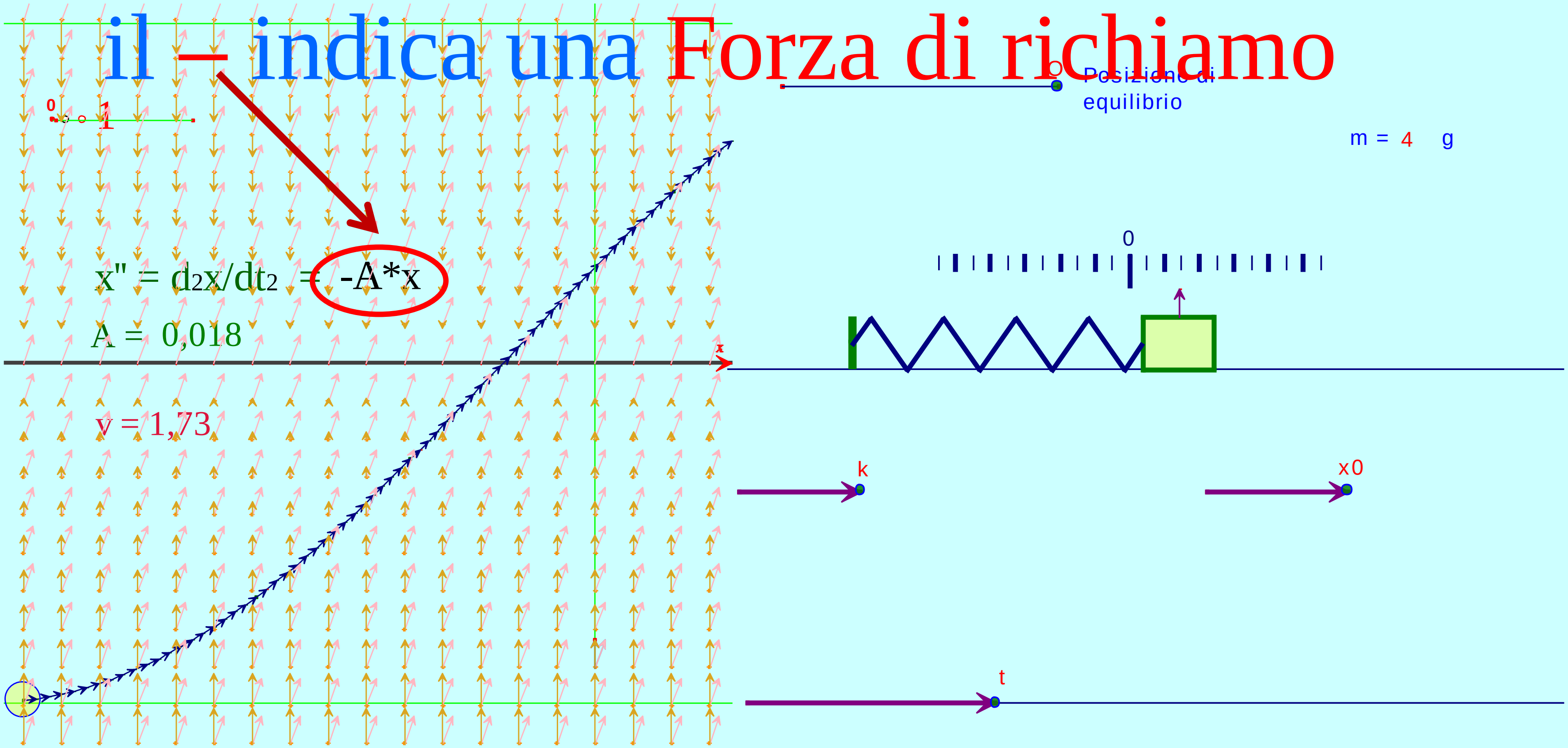
l'abbiamo trasformata in un' equazione del I ordine!

(come quella dell'RC)


Equazione Differenziale
0
1
Legge della Forza
X
y
x" = d2x/dt2 = -A*x
A = 0,018
1
t
1
x
Legge del Moto
v = 1,73
Campo di Forze
Vettore Velocità
FIG
_.fig

# Questo descrive …

## il – indica una Forza di richiamo




# …un moto armonico

_.fig

# Usiamo ora il metodo del polinomio caratteristico

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\alpha^2 = -k/m\ 1$$

Ovvero:

$$\alpha^2 = - k/m$$

Cosa insegniamo agli studenti?

IMPOSSIBILE!

oppure NON È REALE!

# Sbagliamo!

$$\alpha^2 = -k/m$$

La matematica della realtà
è più ricca della matematica
che insegniamo!

Un esponenziale complesso …

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

… è una funzione reale!

Sì!

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

Tra l’altro

(non lo dite a nessuno) …

… questi …


… funzionano con

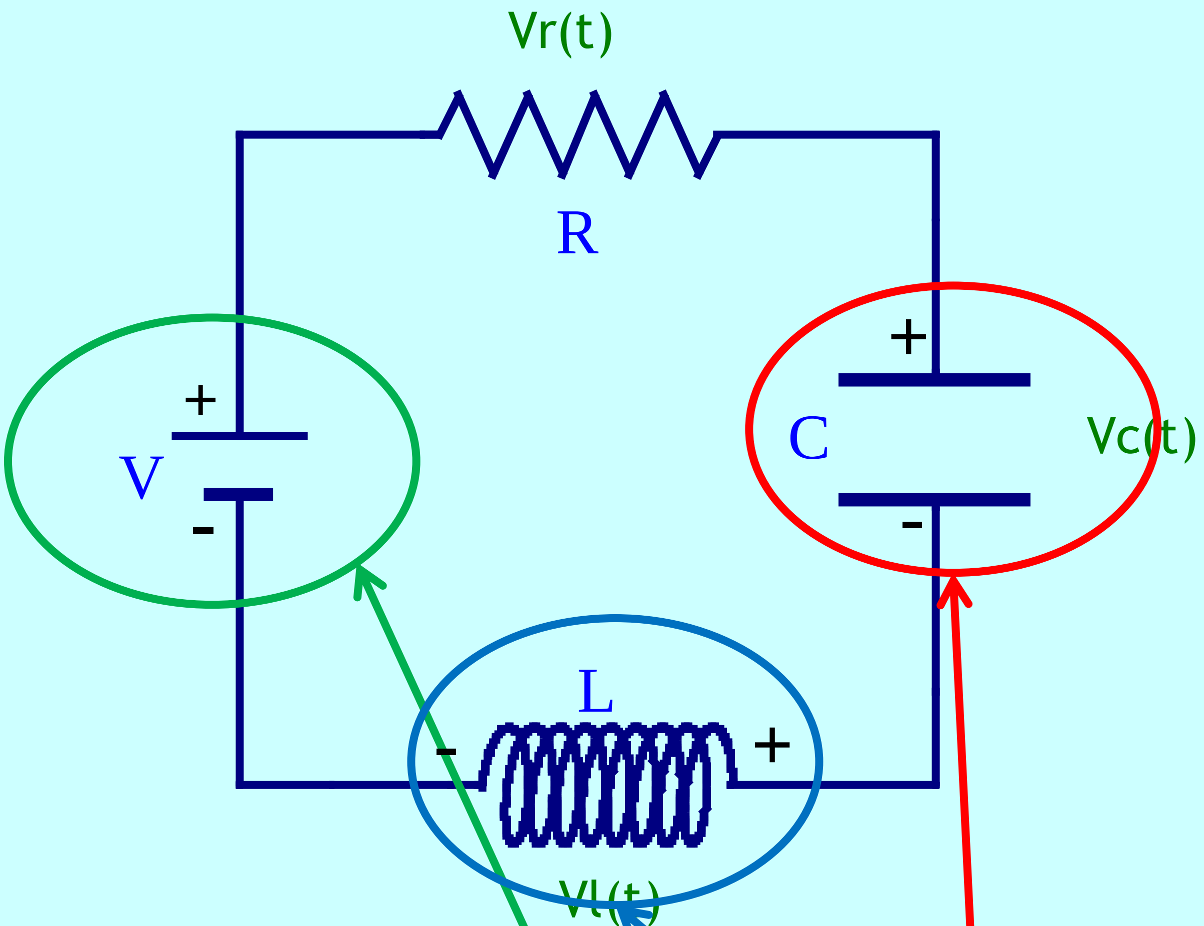
esponenziali complessi

(e anche zero a denominatore!)

E sono reali …


… come reali le funzioni che ne descrivono il comportamento

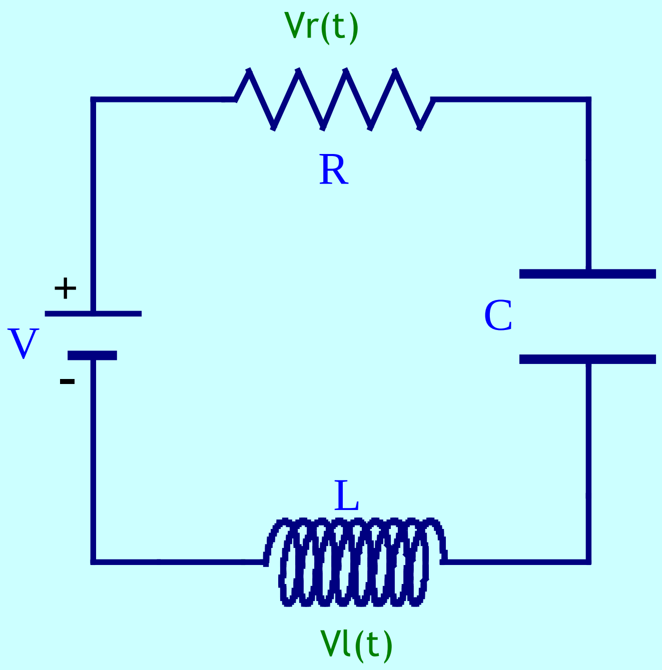
# Circuito RCL




$$V - v_C - v_L = v_R = Ri$$

Tre generatori

# Circuito RCL



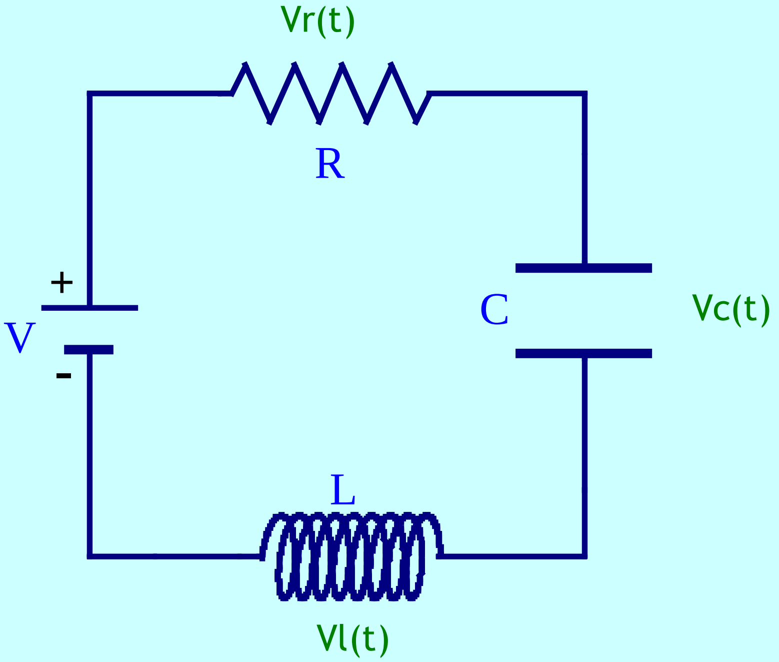

$$V - v_C - v_L = v_R = Ri$$

ma: $v_C = q/C$ e $v_L = L\, di/dt$

allora:

$$V - q/C - L\, di/dt = Ri$$

# Circuito RCL

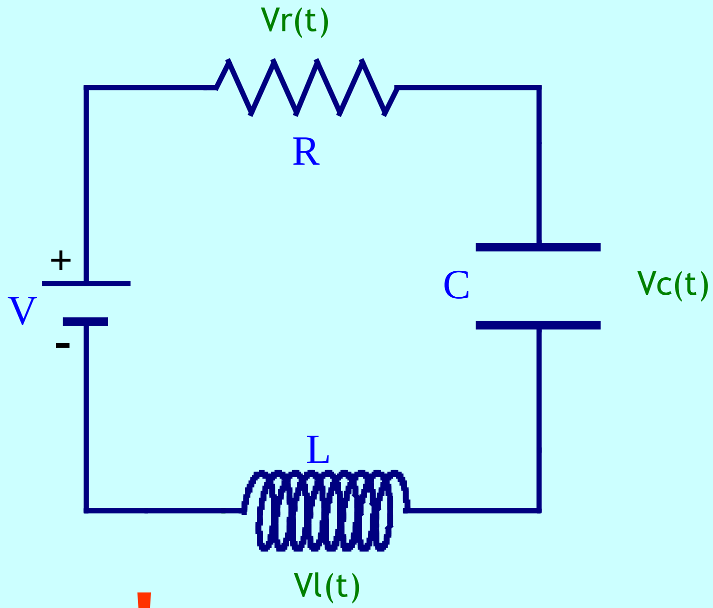



$$V - q/C - L\, di/dt = Ri$$

Allora deriviamo:

$$-\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - L\frac{d^2 i}{dt^2} = R\frac{di}{dt}$$

# Circuito RCL



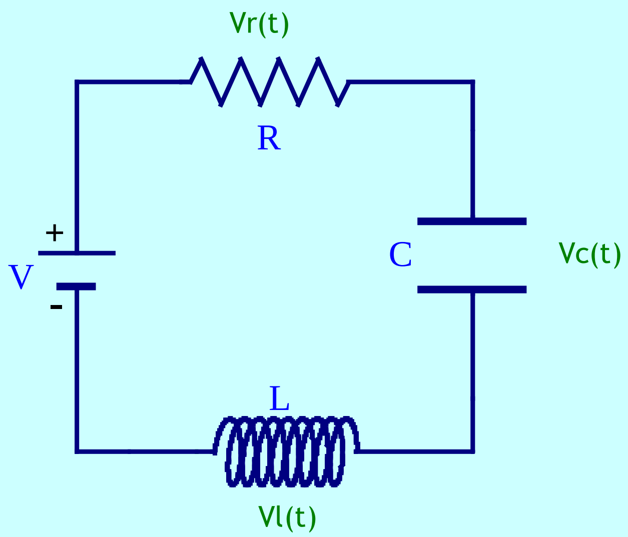

a cui corrisponde il polinomio caratteristico!

$$-\frac{1}{C}i - L\frac{d^2 i}{dt^2} = R\frac{di}{dt}$$

$$-1/C - L\,\alpha^2 = k\,\alpha$$

(polinomio caratteristico)

# Circuito RCL




$$L\,\alpha^2 - R\,\alpha + 1/C = 0$$

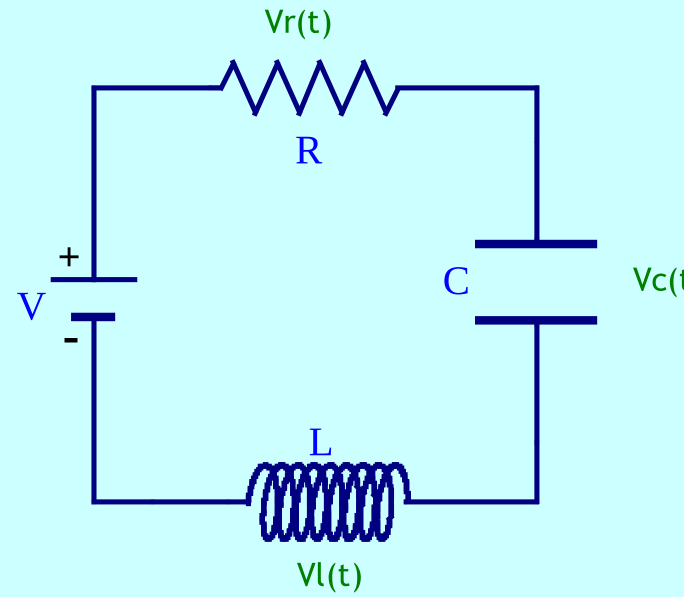
(polinomio caratteristico)

$\zeta$

da cui:

$$\alpha_{1,2} = \frac{RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

# Circuito RCL




Come abbiamo visto con *F=ma*

$$\alpha_{1,2} = \frac{RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

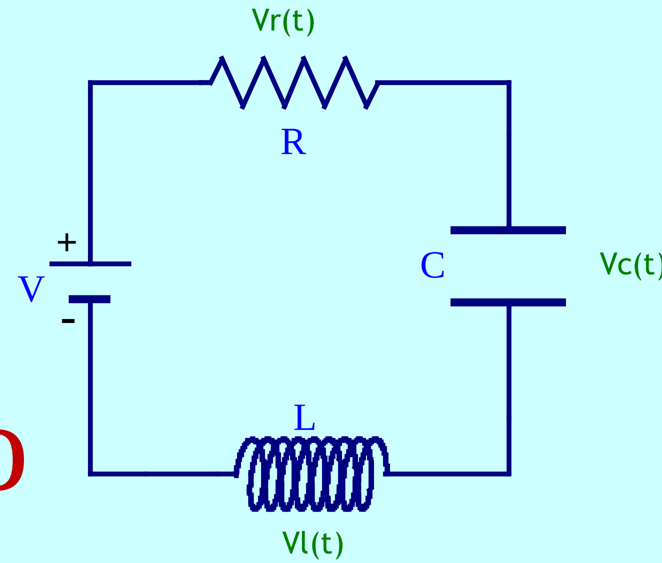
$\zeta$

il caso $\zeta = R^2C^2 - LC > 0$

non è molto interessante

(è un circuito RC!)

# Circuito RCL




…interessante è il caso

$$\alpha_{1,2} = \frac{RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

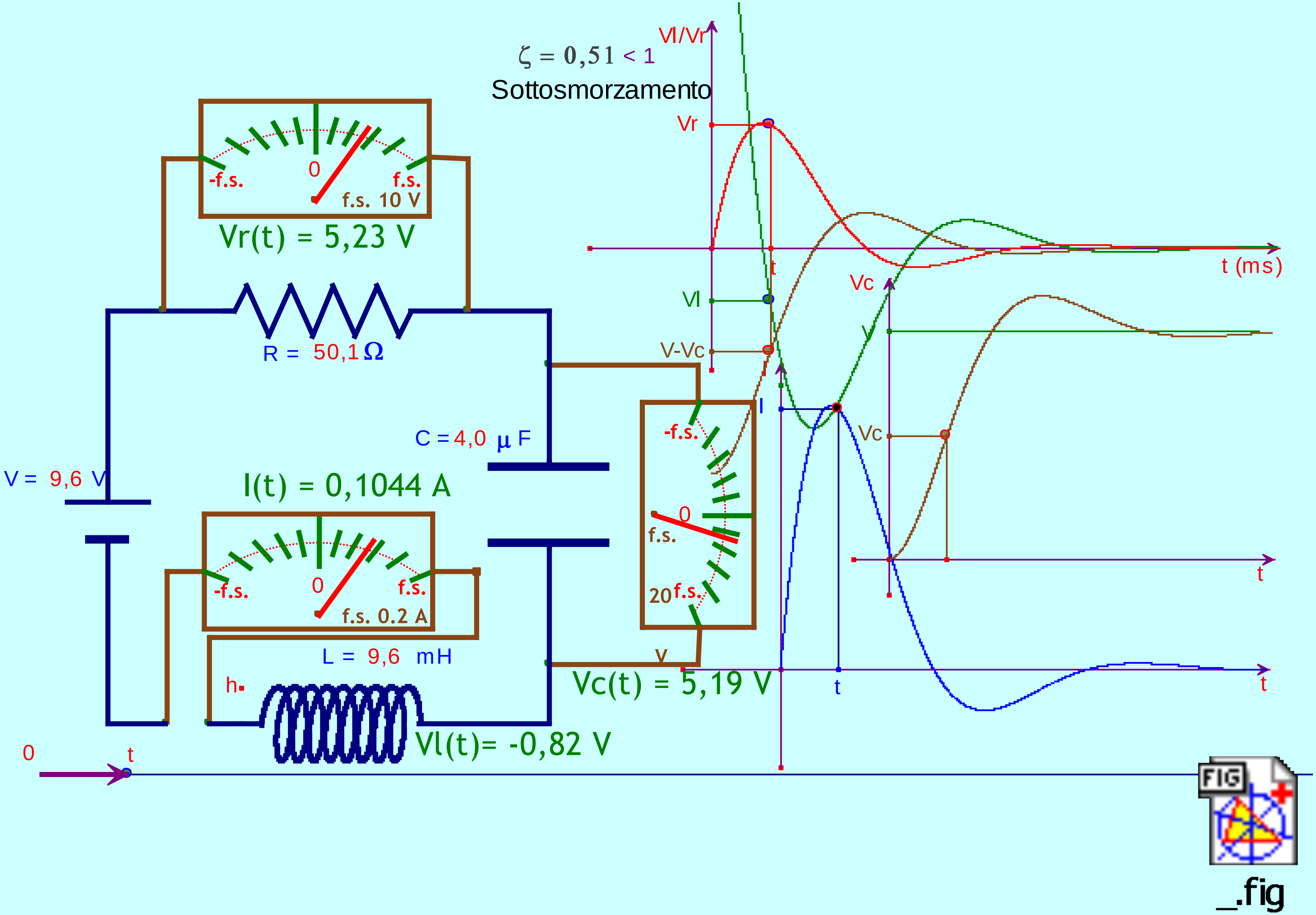
$\zeta$

$\zeta = R^2C^2 - LC < 0$

soluzioni oscillanti (è una Radio!)

Ancora radicando negativo!

# Circuito RCL



La meccanica quantistica è soluzione dell'equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi$$

Anche l’equazione di Schroedinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\,\psi$$

è un’equazione del II ordine

Come quella del

moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\, v}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x}$$

Schroedinger

m. armonico

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{v(x)}\frac{d^2v}{dx^2} = E}$$

Le soluzioni le sappiamo sono esponenziali complessi

$$v(t) = v_0\, e^{i\omega t}$$

sia per Schroedinger che per il moto armonico

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\, v}$$

ma, come sappiamo,

$$v(t) = v_0\, e^{i\omega t} =$$

$$= v_0\,(\cos \omega t + i \,\mathrm{sen}\, \omega t) =$$

che vuol dire? perché i numeri complessi?

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\, v}$$

I fisici parlano di

dualismo onda-corpuscolo

$$v(t) = v_0\, e^{i\omega t} =$$

$$= v_0\, (\cos \omega t + i\, \mathrm{sen}\, \omega t) =$$

corpuscolo

onda

dualismo onda-corpuscolo

$$v(t) = v_0\, e^{i\omega t} =$$

$$= v_0\,(\cos \omega t + i\ \mathrm{sen}\ \omega t)$$

La stessa matematica!

si può "vedere" l'onda o il corpuscolo a seconda del caso o dell'esperimento

La differenza (scientifica e didattica) della meccanica quantistica

è che interessa poco la soluzione dell'equazione di Schroedinger

sono esponenziali complessi (*sen* o *cos*) o reali (*senh* o *cosh*) interessa poco la

soluzione

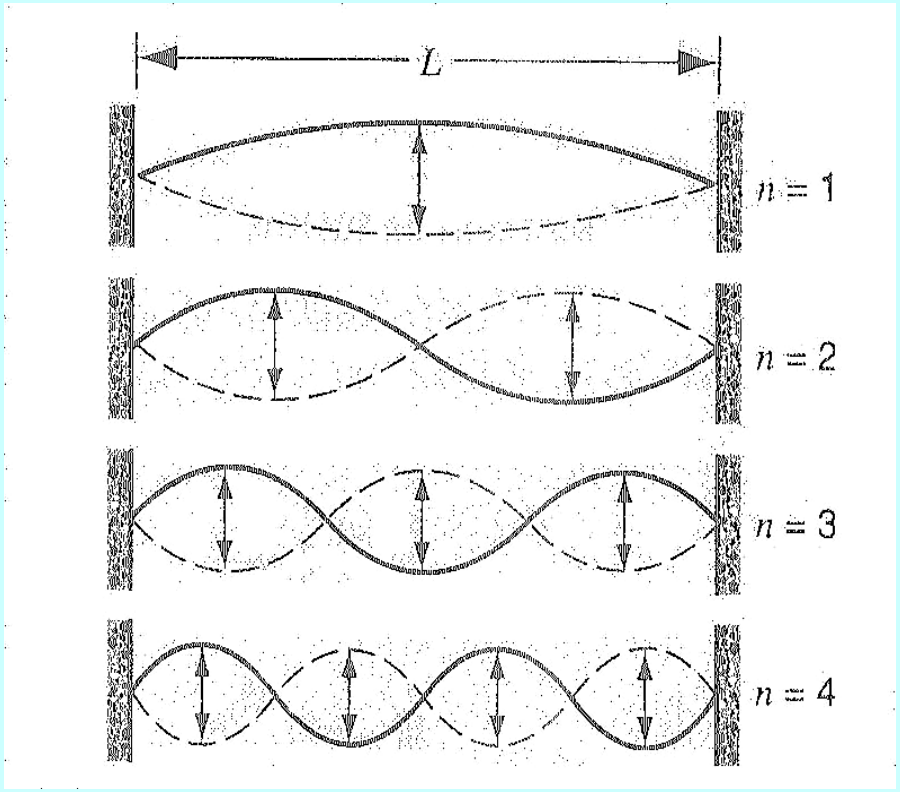
interessano le

condizioni al contorno

(come nei problemi classici delle onde)

(come nei problemi classici delle onde)

le onde stazionarie

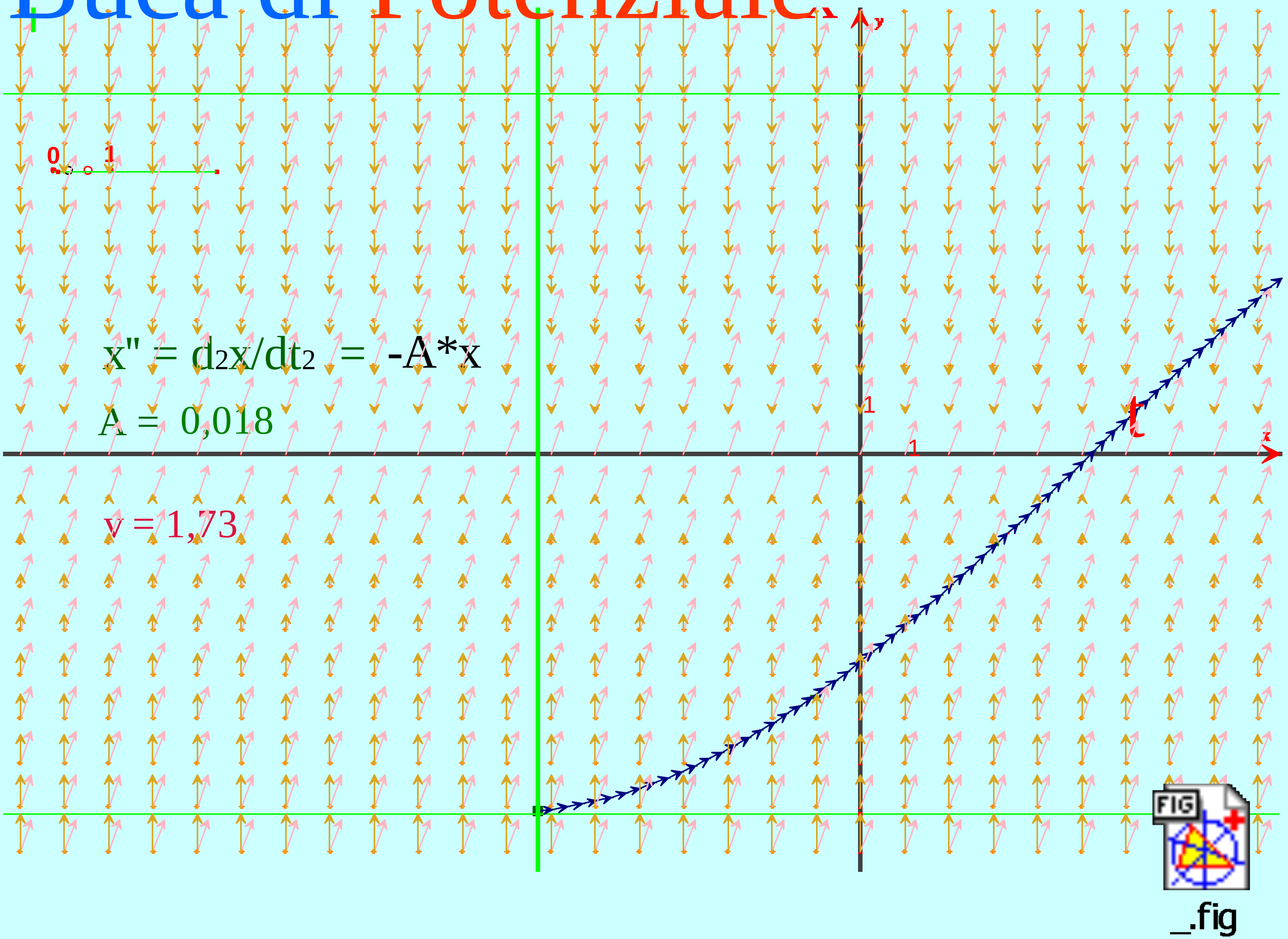


non ci interessa la soluzione
(già la sappiamo)

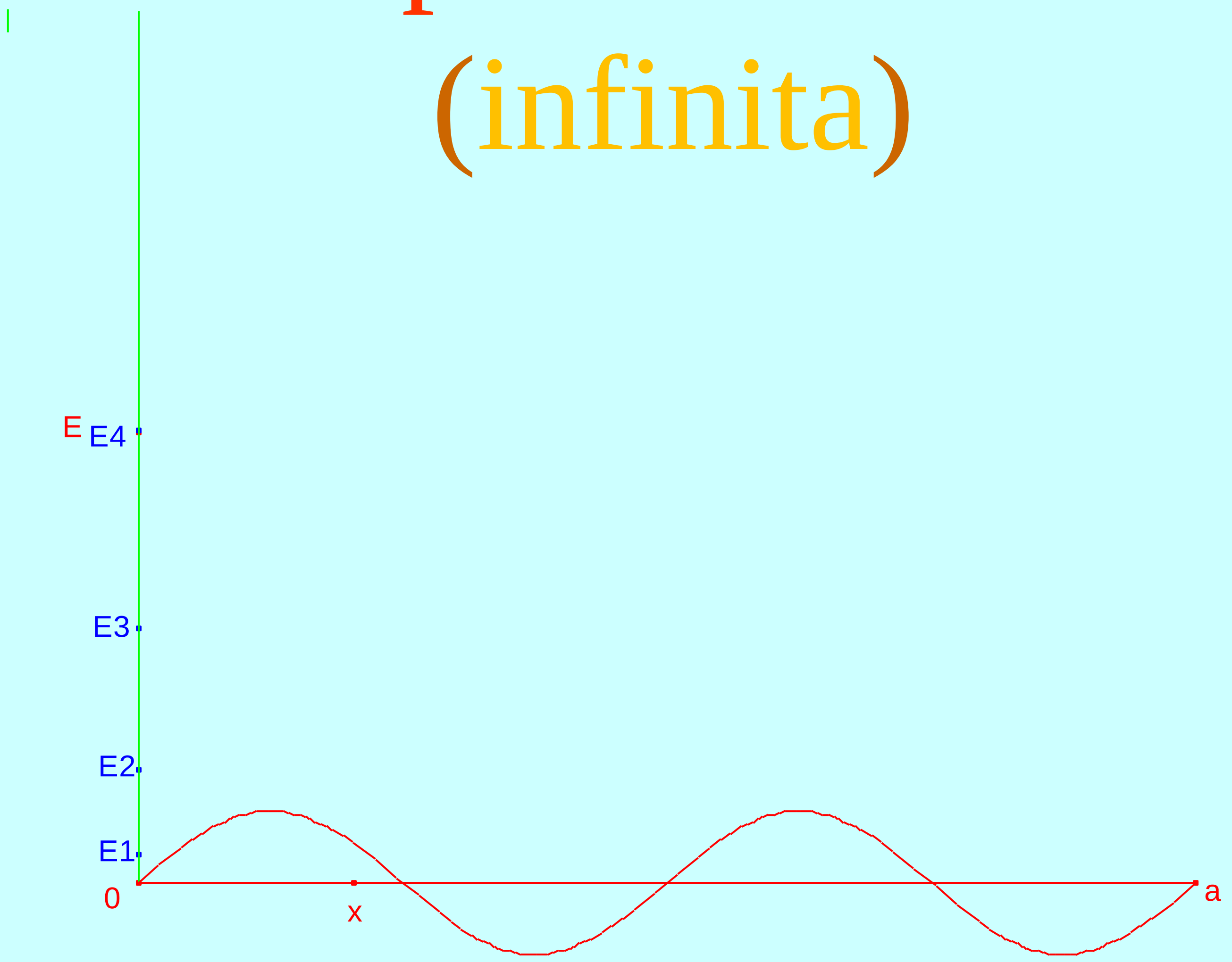
ma quale/i soluzione/i?

soluzioni che
sono in numero discreto
(ecco perché quantistica!)

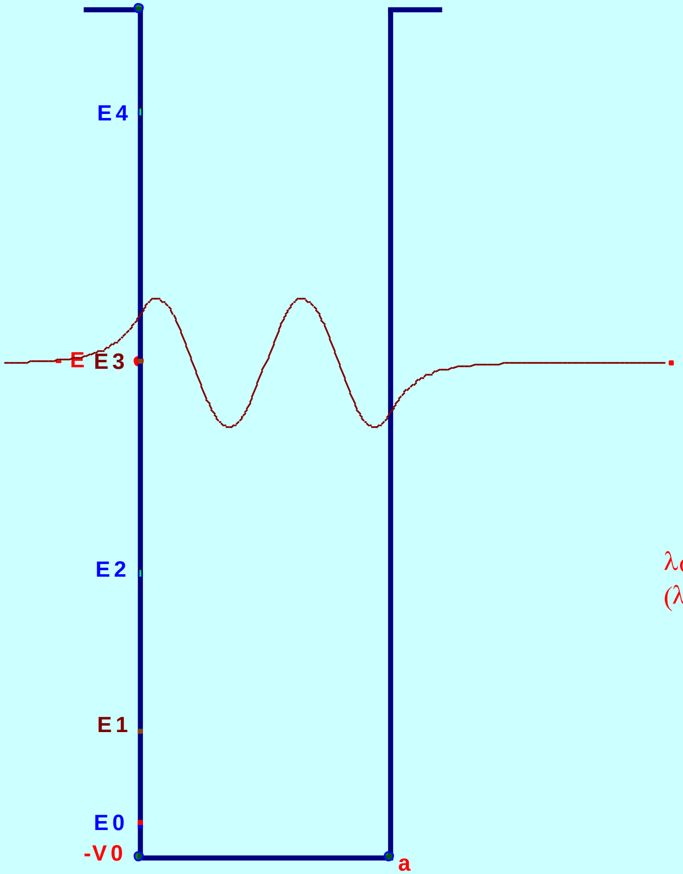
# Buca di Potenziale

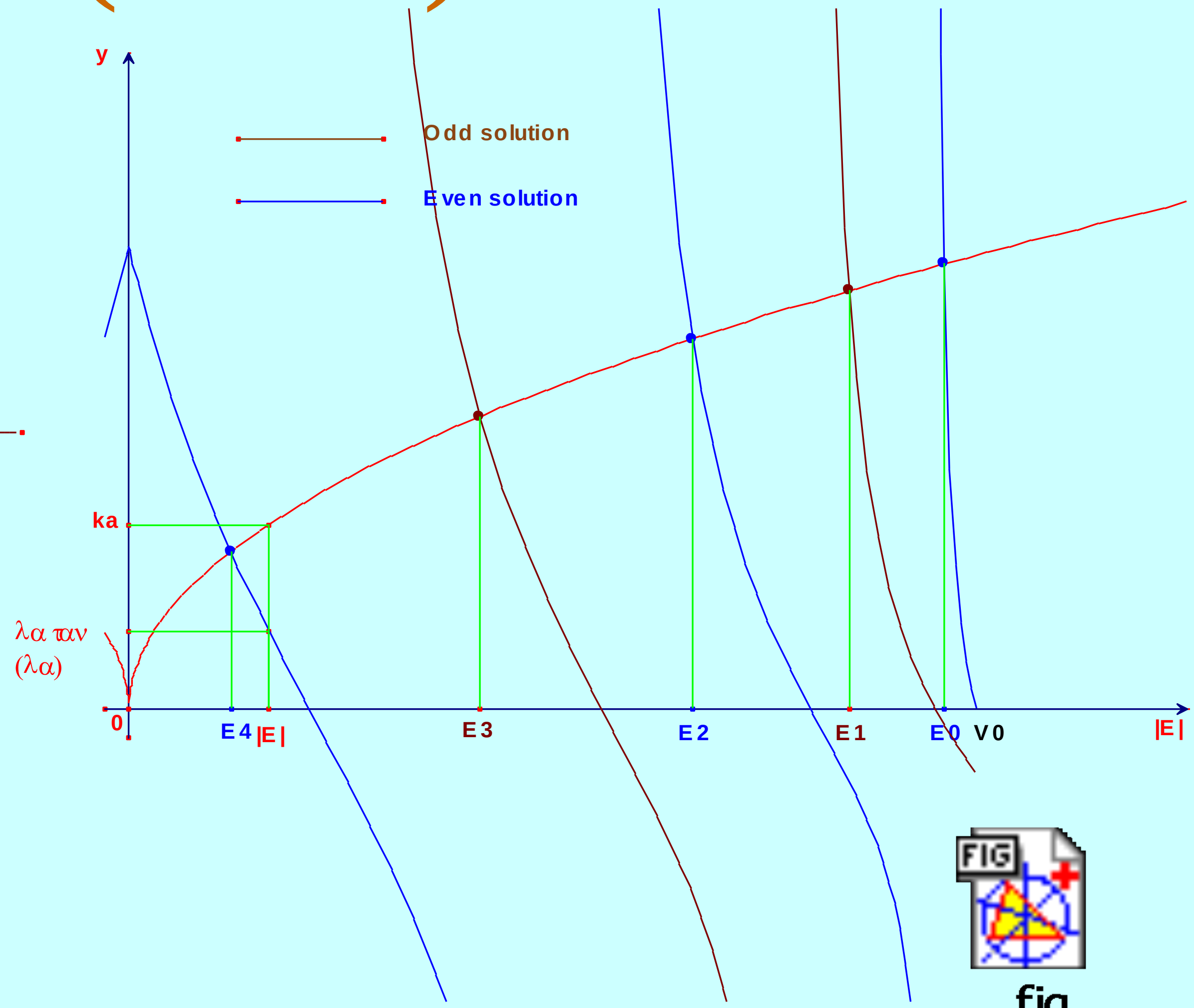


# Buca di potenziale teorica (infinita)




# Buca di potenziale reale (finita)



"Ci son tante più cose tra Cielo e Terra, Orazio, di quanto ne prescriva la tua filosofia"

(Schakespeare Amleto)

# Fine

Ruben Sabbadini: rusabba@tin.it